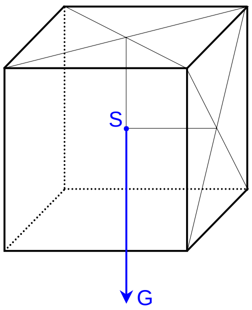
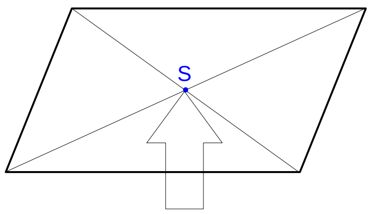
FESTIGKEITSLEHRE

Schwerpunkte *(baricentro)*

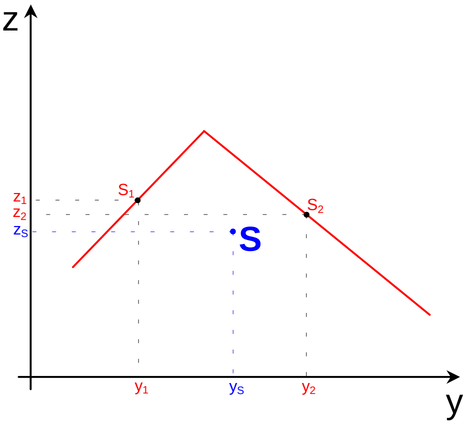
Der Schwerpunkt ist der Durchgangspunkte der Resultierenden aller Massenkräfte einer Linie, einer Fläche oder eines Körpers. Im Schwerpunkt eines Körpers kann man sich das Gewicht desselben konzentriert vorstellen.





Ein im Schwerpunkt unterstützter Körper (Fläche, Linie) befindet sich im *indifferenten Gleichgewicht*. Alle Linien durch den Schwerpunkt nennt man **Schwerlinien**. Der Schwerpunkt kann rechnerisch oder graphisch ermittelt werden.

Schwerpunkt von Linien



$$y_s = \frac{L_1 \cdot y_1 + L_2 \cdot y_2}{L_1 + L_2}$$

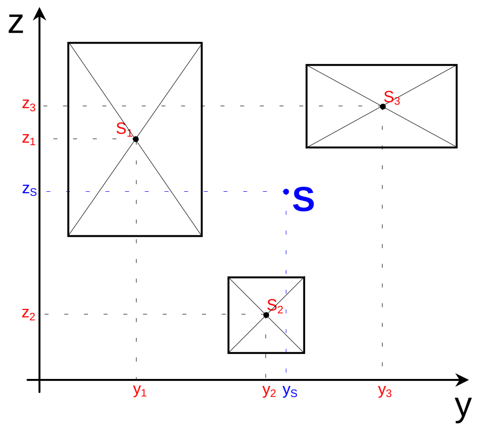
$$z_s = \frac{L_1 \cdot z_1 + L_2 \cdot z_2}{L_1 + L_2}$$

Allgemein:

$$y_s = \frac{\sum (L_i \cdot y_i)}{\sum L_i}$$

$$z_s = \frac{\sum (L_i \cdot z_i)}{\sum L_i}$$

Schwerpunkt von Flächen



$$y_s = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

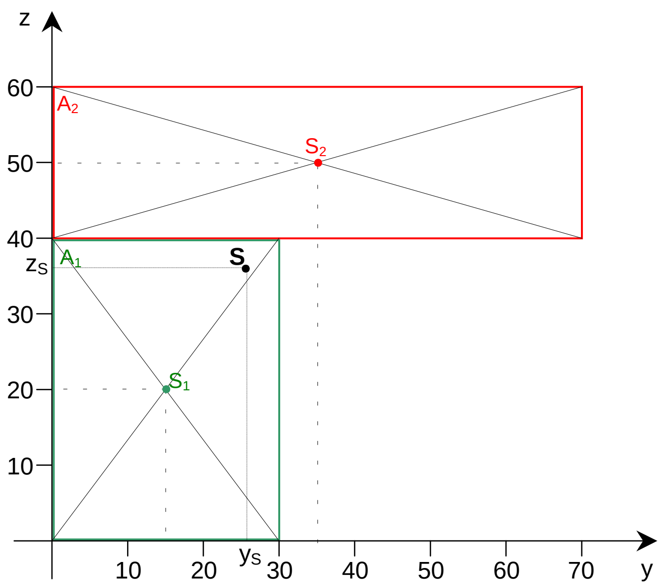
$$z_s = \frac{A_1 \cdot z_1 + A_2 \cdot z_2 + A_3 \cdot z_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

Allgemein:

$$y_s = \frac{\sum (A_i \cdot y_i)}{\sum A_i}$$

$$z_s = \frac{\sum (A_i \cdot z_i)}{\sum A_i}$$

Beispiel:



$A_1 = 30 \cdot 40 = 1200\ cm^2$

$y_1 = 15\ cm$

$z_1 = 20\ cm$

$A_2 = 20 \cdot 70 = 1400\ cm^2$

$y_2 = 35\ cm$

$z_2 = 50\ cm$

$$y_s = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{A_1 + A_2} = \frac{1200 \cdot 15 + 1400 \cdot 35}{1200 + 1400} = \mathbf{25{,}77\ cm}$$

$$z_s = \frac{A_1 \cdot z_1 + A_2 \cdot z_2}{A_1 + A_2} = \frac{1200 \cdot 20 + 1400 \cdot 35}{1200 + 1400} = \mathbf{36{,}15\ cm}$$

Trägheitsmoment I *(momento d´inerzia)*

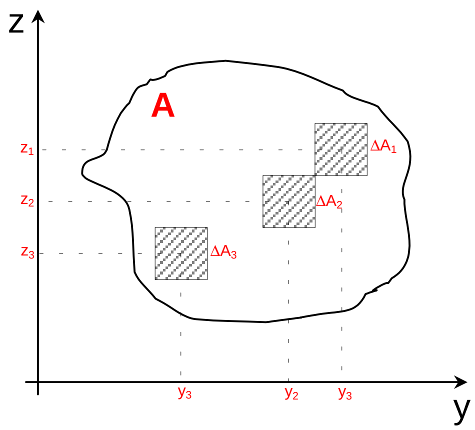
Trägheitsmomente sind Flächenmomente zweiten Grades und ergeben sich aus dem Produkt von Flächen und dem Quadrat von Längen:

$$cm^2 \cdot cm^2 = cm^4$$

Trägheitsmomente sind rein mathematische Begriffe und nur von der Form und Größe einer Fläche anhängig.

Man unterscheidet zwischen:
- *axialem Trägheitsmoment*
- *polarem Trägheitsmoment*
- *zentrifugalem Trägheitsmoment*

Das axiale Trägheitsmoment



$$I_y = \Delta A_1 \cdot z_1^{\ 2} + \Delta A_2 \cdot z_2^{\ 2} + \Delta A_3 \cdot z_3^{\ 2} ...$$

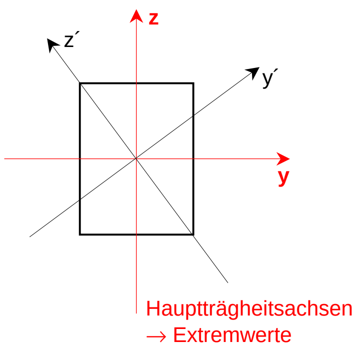
$$I_z = \Delta A_1 \cdot y_1^{\ 2} + \Delta A_2 \cdot y_2^{\ 2} + \Delta A_3 \cdot y_3^{\ 2} ...$$

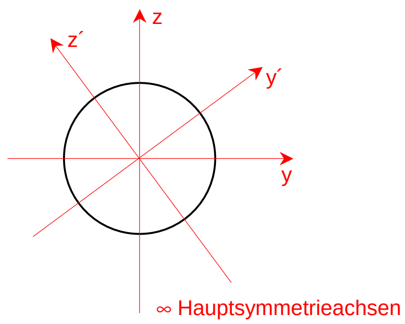
Allgemein:

$$I_y = \sum \left(\Delta A_i \cdot z_i^{\ 2} \right)$$

$$I_z = \sum \left(\Delta A_i \cdot y_i^{\ 2} \right)$$

Das axiale Trägheitsmoment ergibt sich aus dem Produkt der Fläche und dem Quadrat der Abstände zu den Achsen x bzw. y. Durch den Schwerpunkt einer Fläche lassen sich unendlich viele Schwerachsen legen und damit erhält man ebensoviele verschiedene Trägheitsmomente (Ausnahme: Kreis und Kreisring).





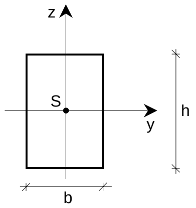
Jede Querschnittsfläche hat aber zwei Schwerachsen um die das Trägheitsmoment einmal ein Maximum und einmal ein Minimum aufweist. Es sind dies die Hauptachsen um die dazugehörigen Hauptträgheitsmomente.

Diese Hauptachsen haben folgende Eigenschaften:

- *sie stehen senkrecht zueinander*
- *jede Symmetrieachse ist auch Hauptachse*

Trägheitsmomente wichtiger Querschnitte

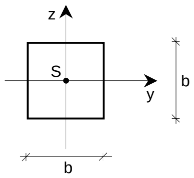
1) *Rechteck*



$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

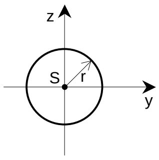
$$I_z = \frac{b^3 \cdot h}{12}$$

2) *Quadrat*



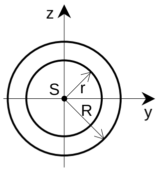
$$I_y = I_z = \frac{b^4}{12}$$

3) *Vollkreis*



$$I_y = I_z = \frac{r^4 \cdot \pi}{4}$$

4) *Kreisring*

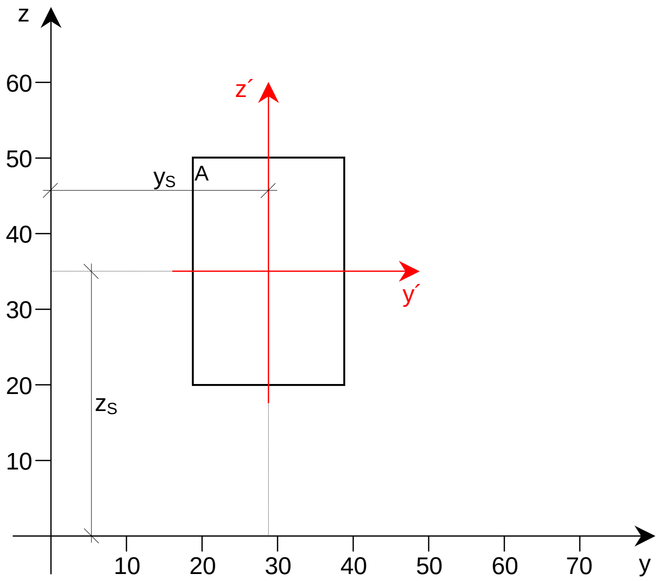


$$I_y = I_z = \frac{(R^4 - r^4) \cdot \pi}{4}$$

Der Satz von Steiner

Mit dem Satz von Steiner kann das Trägheitsmoment für eine zur Schwerachse parallele Achse berechnet werden.
Das Trägheitsmoment einer Fläche A für eine zur Schwerachse parallele Achse ist gleich der Summe aus Eigenträgheitsmoment und dem Produkt aus Fläche A und dem Quadrat des Abstands beider Achsen.

Übung



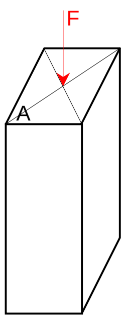
$$b = 20\ cm$$
$$h = 30\ cm$$
$$y_S = 35\ cm$$
$$z_S = 30\ cm$$
$$A = 20 \cdot 30 = 600\ cm^2$$

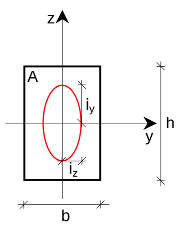
$$I_y = I'_y + A \cdot {z_S}^2 = \frac{b \cdot h^3}{12} + b \cdot h \cdot {z_S}^2 = \frac{20 \cdot 30^3}{12} + 20 \cdot 30 \cdot 35^2 = 780.000\ cm^4$$

$$I_z = I'_z + A \cdot {y_S}^2 = \frac{b^3 \cdot h}{12} + b \cdot h \cdot {y_S}^2 = \frac{20^3 \cdot 30}{12} + 20 \cdot 30 \cdot 30^2 = 560.000\ cm^4$$

Der Trägheitsradius i *(raggio d´inerzia)*

Er ist eine Größe bei der Bemessung von knickgefährdeten Druckstäben. Der Trägheitsradius hängt vom Trägheitsmoment und der Querschnittsfläche A ab.





$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$$

im Fall eines Rechtecks

$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12} \qquad A = b \cdot h$$

$$\Rightarrow i_y = \sqrt{\frac{b \cdot h^3}{12 \cdot b \cdot h}} = \mathbf{h \cdot 0{,}289}$$

$$I_z = \frac{b^3 \cdot h}{12} \qquad A = b \cdot h$$

$$\Rightarrow i_z = \sqrt{\frac{b^3 \cdot h}{12 \cdot b \cdot h}} = \mathbf{b \cdot 0{,}289}$$

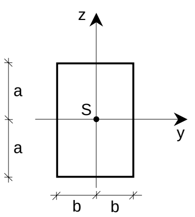
Da ein knickgefährdeter Druckstab stets um die Achse mit dem kleineren Trägheitsmoment ausknickt, ist für diesen Stabilitätsnachweis der kleinste Trägheitsradius maßgebend $\mathbf{i_{min}}$.

$$I_z = I_{min} \Rightarrow i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = i_{min} \Rightarrow \text{Ausknicken in y-Richtung}$$

Zeichnen wir die Trägheitsradien auf den Hauptachsen ein, erhalten wir die Trägheitsellipse.

Das Widerstandsmoment W *(momento di restistenza)*

Er ist eine wichtige Größe für die Bemessung von Biegeträgern und für die Ermittlung von Biegespannungen im Querschnitt. Das Widerstandsmoment ist ein Maß für die Biegefestigkeit eines Trägers und ist vom Trägheitsmoment, sowie vom größten Faserabstand von der Spannungslinie aus abhängig.

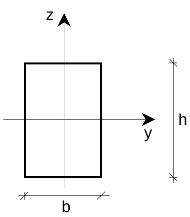


Spannungslinie

$$W = \frac{I}{a} = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{Faserabstand}} \qquad [w] = 1\,cm^3$$

$$W_y = \frac{I_y}{a} \qquad W_z = \frac{I_z}{b}$$

im Fall eines Rechtecks



$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12} \qquad a = \frac{h}{2} \Rightarrow W_y = \frac{b \cdot h^3}{12 \cdot \frac{h}{2}} = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

$$I_z = \frac{b^3 \cdot h}{12} \qquad a = \frac{b}{2} \Rightarrow W_z = \frac{b^3 \cdot h}{12 \cdot \frac{b}{2}} = \frac{b^2 \cdot h}{6}$$

Beanspruchung von Bauteilen

Bauteile müssen auf ihre Beanspruchung hin untersucht werden. Wirken auf ein Tragwerk äußere Kräfte, so ergeben sich Auflagerkräfte und innere Kräfte, welche den äußeren Kräften das Gleichgewicht halten. Die Größe der Beanspruchung eines Bauteils ist von den Schnittkräften (N, Q, M) und von Querschnittsabmessungen abhängig. Ein Maß für die Beanspruchungen ist die Spannung.

Spannung

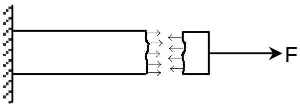
Sie ist die innere Kraft bezogen auf die Querschnittfläche A.

$$\text{Spannung } \sigma = \frac{\text{Innere Kraft}}{\text{Querschnittsfläche}} \qquad [\sigma] = 1\frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

Je nach Art der Schnittkraft unterscheiden wir zwischen:

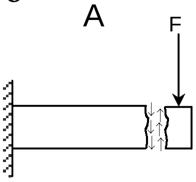
Normalspannung

$$\sigma = \frac{F}{A}$$ z.B. Zugspannung, Druckspannung



Tangentialspannung

$$\sigma = -\frac{F}{A}$$ z.B. Scherspannung, Schubspannung



Formänderung

Unter dem Einfluß von Spannungen entstehen an einem Tragwerk Formänderungen. Diese können zum Beispiel Verlängerungen (infolge von Zugspannungen) oder Verkürzungen (infolge von Druckspannungen) sein. Formänderungen können elastischer oder plastischer Natur sein.

Dehnung:

Unter der Dehnung versteht man die Verlängerung Δl eines Stabes bezogen auf die ursprüngliche Länge l_0.

$$\varepsilon = \frac{\text{Verlängerung } \Delta l}{\text{ursprüngliche Länge } l_0}$$

Durch Verkürzungen entstehen negative Dehnungen, sogenannte Stauchungen.

Beispiel

geg: $l_1 = 10$ m
$l_2 = 10{,}20$ m

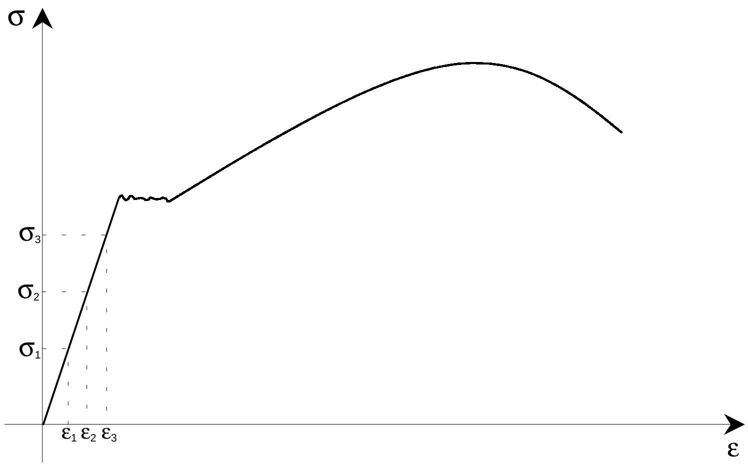
$$\Delta l = l_1 - l_2 = 0{,}2\text{ m}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{0{,}2\text{ m}}{10\text{ m}} = 0{,}02 \equiv 2\%$$

Das Hook´sche Gesetz

Aus der Spannungs-Dehnungslinie des Stahls erkennt man, dass der erste Bereich der Linie geradlinig verläuft. Es ist dies der elastische Bereich des Werkstoffs. Für diesen Bereich gilt das Hook´sche Gesetz, welches folgendes besagt:

die Dehnungen ε verhalten sich proportional zu den Spannungen σ im elastischen Bereich.



$$\frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2} = \frac{\sigma_3}{\varepsilon_3} = E$$

E…Elastizitätsmodul

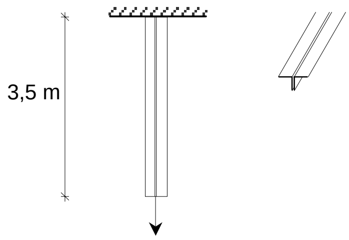
$$E_{\text{Stahl}} = 210.000 \; {}^{N}\!/\!_{mm^2}$$
$$E_{\text{Beton}} = 30.000 \; {}^{N}\!/\!_{mm^2}$$
$$E_{\text{Holz (parallel zur Faser)}} = 10.000 \; {}^{N}\!/\!_{mm^2}$$
$$E_{\text{Holz (senkrecht zur Faser)}} = 300 \; {}^{N}\!/\!_{mm^2}$$

Längsdehnung

$$\sigma = \frac{F}{A} \qquad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{F \cdot l_0}{A \cdot \Delta l}$$

$$\Delta l = \frac{F \cdot l_0}{E \cdot A}$$

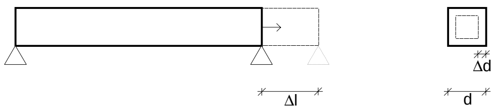


2 x 35 x 5 Stäbe
Berechne die Verlängerung der Stäbe!

$$\Delta l = \frac{F \cdot l_0}{E \cdot A} = \frac{150.000 \text{ N} \cdot 350 \text{ cm}}{2{,}1 \cdot 10^7 \; {}^{N}\!/\!_{cm^2} \cdot 6{,}6 \text{ cm}^2} = 0{,}38 \text{ cm}$$

Querdehnung ε_q

Wird ein Stab gedehnt (z.B. in Folge von Zug) so wird er in der Querrichtung dünner. Wird er gestaucht (in Folge von Druck) so wird er in Querrichtung dicker.
Die Querdehnzahl η gibt das Verhältnis zwischen Querdehnung (Querstauchung) und Längsdehnung (Längsstauchung) an.



$\Delta l = \varepsilon \cdot l_0$

$\Delta d = \varepsilon_q \cdot d$

$$\eta = \frac{\varepsilon_q}{\varepsilon} = \text{konstant}$$

Beton: $\eta_{Zug} = 0{,}1 - 0{,}125$

$\eta_{Druk} = 0{,}16 - 0{,}20$

Stahl: $\eta = 0{,}3 - 0{,}35$

Wärmedehnzahl α_T

Infolge Erwärmung dehnt sich ein Körper aus. Die Wärmedehnzahl gibt die Längenänderung eines 1 m langen Stabes bei einer Temperaturänderung von 1°C an.

$$\Delta l_T = \alpha_T \cdot l_0 \cdot \Delta T$$

$$\alpha_{Stahl} = 1{,}2 \cdot 10^{-5} \frac{m}{m°K}$$

Beispiel:
Berechne die Längenänderung eines 12 m langen Stahlstütze bei folgenden T:
Montage: 20°C
am Bau: -20°C

$$\Delta T = 20° - (-20°) = 40°K$$

$$\Delta l_T = \alpha_T \cdot l_0 \cdot \Delta T = 1{,}2 \cdot 10^{-5} \frac{m}{m°K} \cdot 12m \cdot 40°K = 0{,}006\ m = 6\ mm$$

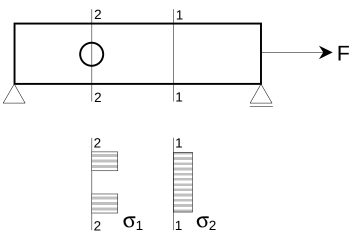
Spannungsarten

Bei den Spannungen unterscheidet man zwischen Normal- und Tangentialspannungen.

1. ***Normalspannungen σ***
   Sie werden erzeugt durch Schnittkräfte die senkrecht zur Querschnittsfläche wirken, z.B. Normalkräfte, Biegemomente, Temperatureinwirkungen. Als Normalspannungen gelten: Zug-, Druck-, Knick- und Temperaturspannungen. Sie verursachen eine Hauptverformung der Querschnittsteilchen in Richtung der Stabachse.

1.1 Zugspannung σ_Z

Wirken auf einen Stab Zugkräfte ein, so kommt es im Querschnitt zu Zugspannungen. Zugspannungen erhalten ein positives Vorzeichen.

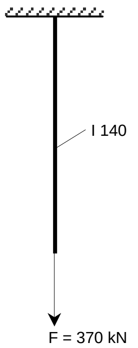


$\sigma_2 > \sigma_2$

$$\sigma_Z = \frac{F}{A_n} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Nettofläche}}$$

Bei der Bemessung von Zugstäben, z.B. bei Holz oder Stahl muss nachgewiesen werden, dass die auftretende Zugspannung σ_Z ≤ der zulässigen Zugspannung $\overline{\sigma_Z}$ ist.
Die zulässige Zugspannung ist die um den Sicherheitsfaktor *Sf* reduzierte Zugfestigkeit und darf von den vorhandenen Zugspannungen nicht überschritten werden.

$$\sigma_{Z\,vorh} \le \overline{\sigma_Z}$$



Fe 360 (St 37) $\rightarrow \overline{\sigma_Z} = 16\ {}^{kN}/_{cm^2}$

I 140 $\rightarrow A = 18{,}2\ cm^2$

$$\sigma_Z = \frac{F}{A_n} = 20{,}33\ {}^{kN}/_{cm^2} > 16\ {}^{kN}/_{cm^2}$$

Bedingung:

$$\sigma_Z = \frac{F}{A_n} \le \overline{\sigma_Z}$$

$$\Rightarrow A_n \ge \frac{F}{\overline{\sigma_Z}} = \frac{370kN}{16\ {}^{kN}/_{cm^2}} = 23{,}13\ cm^2$$

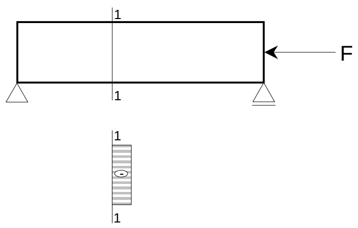
aus Tabelle: I 180 $A = 27{,}9\ cm^2$

Nachweis:

$$\sigma_{Z\ vorhanden} = \frac{F}{A_{effektiv}} = \frac{370\ kN}{27{,}9\ cm^2} = 13{,}26\ {}^{kN}/_{cm^2} < \overline{\sigma_Z} = 16\ {}^{kN}/_{cm^2}$$

1.2 Druckspannung σ_D

Wirken auf einen Stab Druckkräfte ein, so entstehen im Querschnitt Druckspannungen, sie erhalten ein negatives Vorzeichen.



Als Fläche wird die Nettofläche eingesetzt (Querschnitt - Löcher), es sei denn, die Löcher sind mit mindestens gleich festen Stoffen ausgefüllt.

$$\sigma_D = -\frac{F}{A_n}$$

Bei der Bemessung von einfachen Druckelementen (keine Knickgefahr) muss nachgewiesen werden, dass die auftretende Druckspannung σ_D ≤ der zulässigen Druckspannung $\overline{\sigma_D}$ ist.

$$\sigma_{D\,vorh} \le \overline{\sigma_D}$$

1.3 Temperaturspannungen σ_T

Ist ein Tragwerk Temperaturschwankungen ausgesetzt so erfährt es, wenn die Lagerung es zulässt, eine bestimmte Längenänderung.

$$\Delta l = \pm \alpha_T \cdot l_0 \cdot \Delta T$$

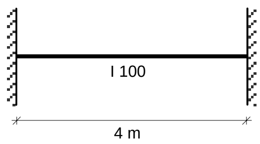
Wird dieses Tragwerk an der Längsänderung gehindert (festes Auflager oder Einspannung), so entstehen im Querschnitt Spannungen. Es sind dies Temperaturspannungen und entsprechen einer inneren Längskräft.

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \Rightarrow \sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0} = E \cdot \frac{\alpha_T \cdot l_0 \cdot \Delta T}{l_0}$$

$$\sigma_T = E \cdot \alpha_T \cdot \Delta T$$

Die auftretenden Temperaturspannungen sind somit entweder Zug- oder Druckspannungen und werden durch die Temperaturänderungen ΔT verursacht.

Beispiel



Montage: 20°C
später: 40°C

$$\Delta T = 20°K$$

$$E_{Stahl} = 2{,}1 \cdot 10^5 \ {}^{kN}\!/_{mm^2}$$

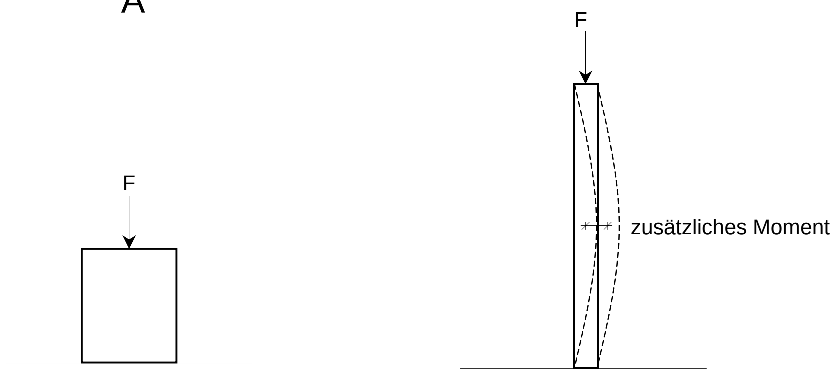
$$\alpha_{T\,Stahl} = 1{,}2 \cdot 10^{-5} \ {}^{m}\!/_{m°K}$$

$$\sigma_T = E \cdot \alpha_T \cdot \Delta T = 50{,}4 \ {}^{N}\!/_{mm^2} = 5{,}04 \ {}^{kN}\!/_{cm^2} \leq 16 \ {}^{kN}\!/_{cm^2}$$

1.4 Knickspannung σ_K

Bei sehr schlanken Druckstäben kann es bereits im Bereich unterhalb der zulässigen Druckspannung infolge übermäßiger Verformung zum Versagen des Tragwerkes kommen, obwohl $\overline{\sigma_D}$ noch gar nicht erreicht ist.

$$\sigma_K = \omega \cdot \frac{F}{A}$$



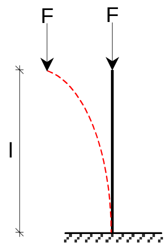
Die Gefahr des Ausknicknes hängt ab von:
- Material des Stabes
- Querschnittsfläche
- Länge des Stabes
- Lagerung des Stabes

<u>Die Knicklänge s_K</u>

Die Knicklänge ist die Länge des Stabes, die bei der Druckbelastung frei Ausknicken kann. Von Euler (1744) wurde die Knicklänge von 4 verschiedenen Lagerungsfällen hergeleitet.

1. Eulerfall

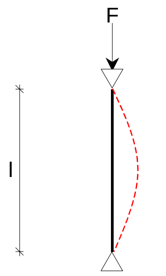
einseitige Einspannung + freies Lager



$$s_K = 2 \cdot l$$

2. Eulerfall

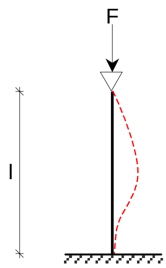
2 feste Auflager



$$s_K = l$$

3. Eulerfall

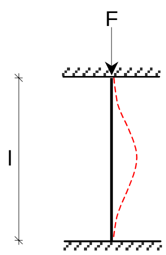
1 festes Auflager + 1 Eingespanntes



$$s_K = 0{,}7 \cdot l$$

4. Eulerfall

2 eingespannte Auflager



$$s_K = 0{,}5 \cdot l$$

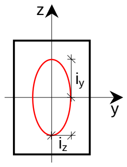
<u>Die Schlankheit λ</u>

Der Schlankheitsgrad λ gibt de Knickempfindlichkeit eines Druckstabes in Abhängigkeit von Stablänge, Lagerungsart und Querschnitt.

$$\lambda = \frac{s_K}{i} = \frac{\text{Knicklänge}}{\text{Trägheitsradius}}$$

Das Ausknicken eines Druckstabes erfolgt immer entlang des kleinsten Trägheitsradiuses.

$$\lambda = \frac{s_K}{i_{min}}$$



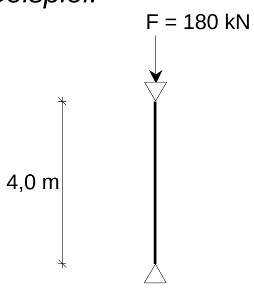
Ausschlaggebend für den Knicknachweis ist der kleinste Trägheistradius (i_y), daraus folgt nämlich der größte Schlankheitgrad λ_{max}.

<u>Die Knickzahl ω</u>

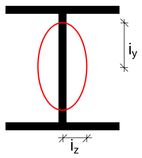
Über den Schlankheitsgrad λ kann in Abhängigkeit zum Werkstoff die Knickzahl ω aus Tabellen entnommen werden. Die Knickzahl drückt das Verhältnis der einfachen zulässigen Druckspannung zur zulässigen Knickspannung aus.

$$\omega = \frac{\sigma_{D\ zul}}{\sigma_{K\ zul}}$$

Beispiel:



Stahlstütze Fe 360
HE-B 200



$\rightarrow$ 2. Eulerfall
$s_K = l = 400\ \text{cm}$

$$\rightarrow \lambda_{max} = \frac{s_K}{i_{min}} = \frac{400\ \text{cm}}{5{,}07\ \text{cm}} = 78{,}90 \approx 79$$

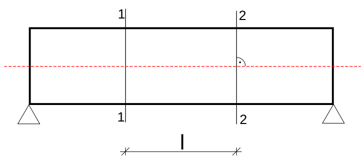
$\rightarrow$ Tabelle
$\omega = 1{,}53$

$$\rightarrow \sigma_K = \omega \cdot \frac{F}{A} = 1{,}53 \cdot \frac{180\ \text{kN}}{78{,}1\ \text{cm}^2} = 3{,}53\ {}^{kN}\!/_{cm^2} < 16\ {}^{kN}\!/_{cm^2}$$

1.5 Biegespannung

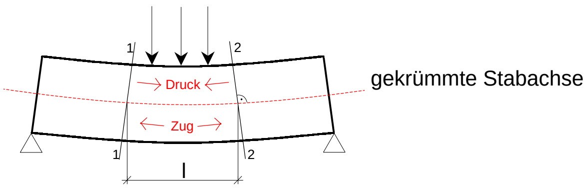
Werden Bauteile auf Biegung beansprucht, entstehen im Querschnitt Biegespannungen. Infolge von Belastung erfährt ein Biegeträger eine Durchbiegung, die im oberen Teil zu Stauchungen und im unteren Teil zu Dehnungen führt.
Wo Dehnungen auftreten herrschen Zugspannungen, wo Stauchungen auftreten herrschen Druckspannungen. Wo Dehnungen in Stauchungen übergehen hat man eine spannungsfreie Faser, die sogenannten Spannungsnulllinie. Diese fällt bei Biegeträgern mit der Schwerachse des Querschnitts zusammen, die Zug- bzw. Druckspannung nimmt zu den Rändern hin linear zu.

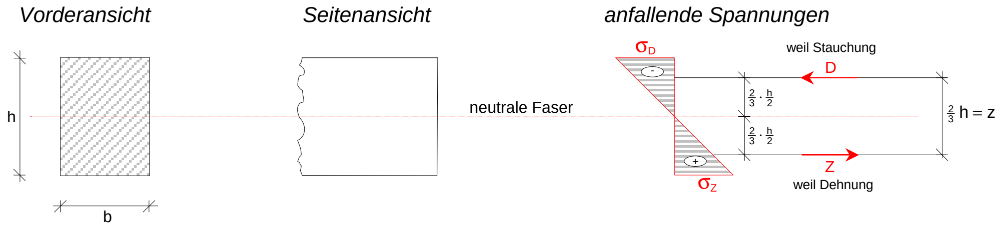
Träger unbelastet

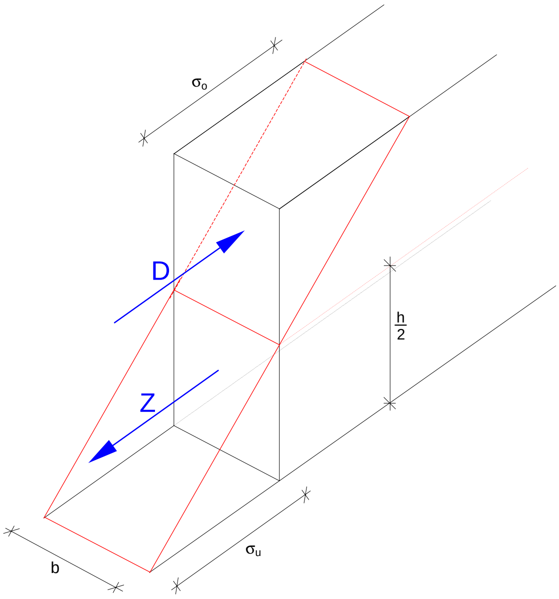


gerade Stabachse

Träger belastet







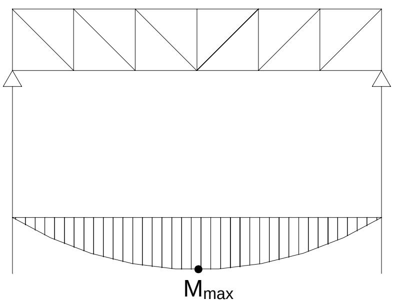
Kraft Z bzw. D = Volumenkeil

$$\Rightarrow Z = \sigma_Z \cdot b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sigma_Z \cdot b \cdot h}{4}$$

$$M = Z \cdot z = \sigma_Z \cdot b \cdot \frac{h}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot h = \sigma_Z \cdot \frac{b \cdot h^2}{6}$$

$$\Rightarrow M = \sigma_Z \cdot W_u \ \textit{bzw.}\ \sigma_Z = \frac{M}{W_u}$$

$$\text{Spannung} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} \Rightarrow \text{Kraft} = \text{Spannung} \cdot \text{Fläche}$$



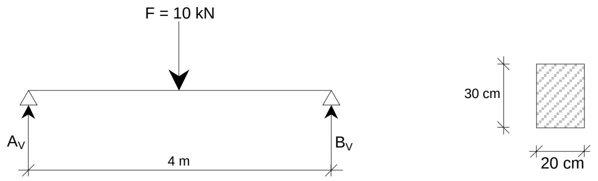
Merke:

äußere Kräfte bewirken eine Durchbiegung, daraus ergibt sich ein äußeres maximales Moment M (→ Stoff der 3. Klasse).
Die inneren Kräfte müssen durch das Kräftepaar Zug- und Druckkraft ein mindestens gleich großes inneres Moment aufbringen.

$$\underset{\text{äußeres Moment}}{M} = \underset{\text{innere Zugkraft}}{Z} \cdot z = \underset{\text{innere Druckkraft}}{D} \cdot z$$

$$\boxed{\sigma = \frac{M}{W}}$$

Beispiel 1:



Überprüfe, ob im betreffenden Fall die Biegespannungen im Holzträger noch zulässig ist.

1) Berechnen des maximalen Feldmomentes

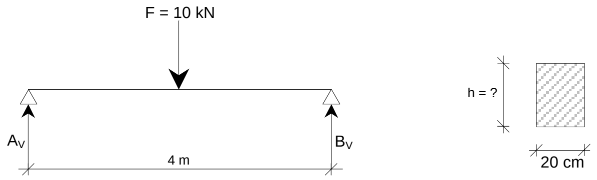
$$M_{max} = \frac{F}{2} \cdot 2\,m = 10\,kNm$$

2) Berechnung des Widerstandmomentes

$$W = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{20\,cm \cdot 30^2\,cm}{6} = 3000\,cm^3$$

3) $$\sigma_B = \frac{M}{W} = \frac{10\,kN \cdot 100\,cm}{3000\,cm} = 0{,}33\,{}^{kN}\!/_{cm^2} \leq 1\,{}^{kN}\!/_{cm^2}$$

Beispiel 2:
Wählen sie die richtige Balkenhöhe und berechnen sie die vorhandenen Biegespannung



1) Berechnen des maximalen Feldmomentes

$$M_{max} = \frac{F}{2} \cdot 2\,m = 10\,kNm$$

2) $$\sigma = \frac{M}{W} \leq \overline{\sigma_B}$$

$$\Rightarrow W \geq \frac{M}{\overline{\overline{\sigma_B}}} = \frac{1000\,kNcm}{1\,{}^{kN}\!/_{cm^2}} = 1000\,cm^3$$

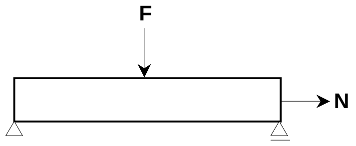
$$\Rightarrow h \geq \sqrt{\frac{W \cdot 6}{b}} \geq \sqrt{\frac{1000\,cm^3 \cdot 6}{20\,cm}} = 17{,}32\,cm \approx h = 18\,cm$$

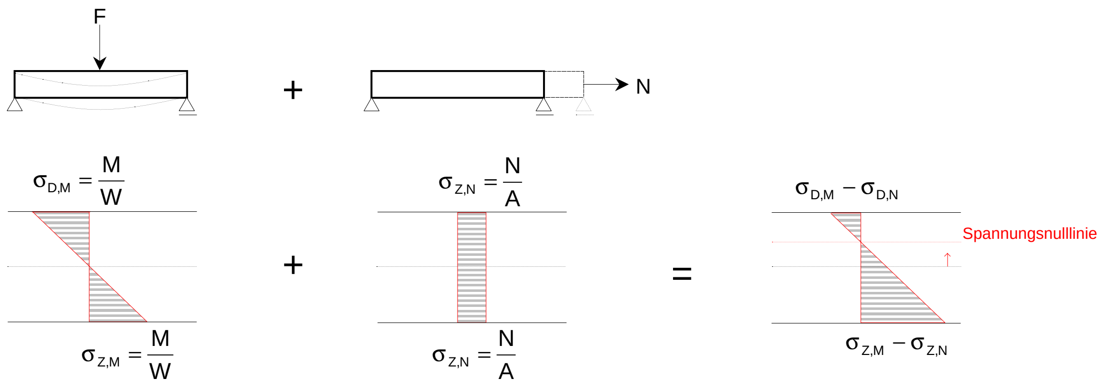
$$W_{vorhanden} = \frac{b \cdot h^2}{6} = 1080\,cm^3$$

$$\sigma_{B\,vorhanden} = \frac{M}{W_{vorh.}} = \frac{1000\,kNcm}{1080\,cm^3} = 0{,}93\,{}^{kN}\!/_{cm^2} < \overline{\sigma_B} = 1\,{}^{kN}\!/_{cm^2}$$

Spannung bei Längskraft und Biegung

Häufig treten im Querschnitt Zug- bzw. Druckspannungen und Biegespannungen gleichzeitig auf, da es sich bei beiden Spannungsarten um Normalspannungen handelt, können diese addiert werden.

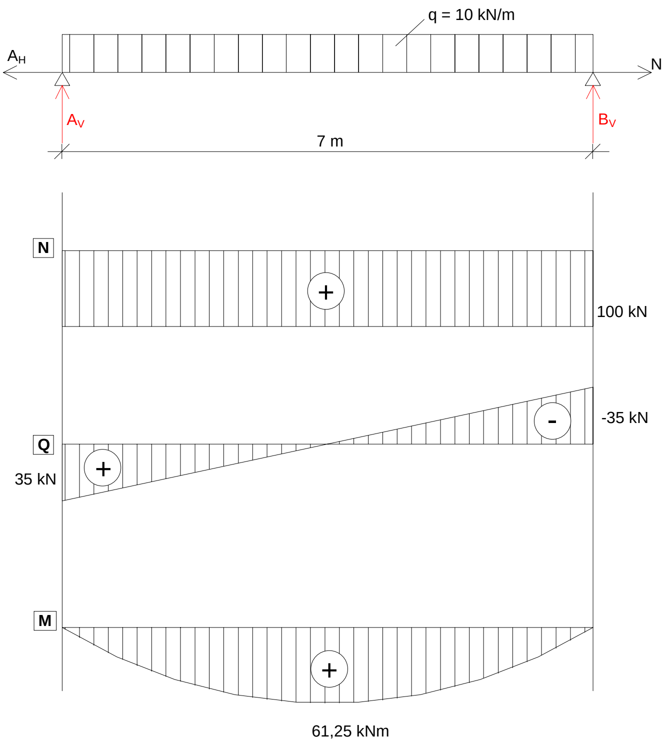




$$\sigma_{M,N} = \frac{M}{W} \pm \frac{N}{A}$$

Während bei einfachen Biegungen die Spannungsnulllinie mit der Spannungsachse zusammenfällt, verschiebt sich bei Spannungsüberlagerung die Spannungsnulllinie.

Beispiel:



Überprüfe die Spannung für eine HE-B 220

$$A_V = B_V = \frac{q \cdot l}{2} = 35\ \text{kN}$$

$$A_H = N = 100\ \text{kN}$$

$$M_{max} = \frac{q \cdot l^2}{8} = 61{,}25\ \text{kNm}$$

HE-B: $A = 91\ \text{cm}^2$

$W_y = 736\ \text{cm}^3$

$$\sigma_{Z,N} = \frac{N}{A} = \frac{100\ \text{kN}}{91\ \text{cm}^2} = 1{,}1\ \text{kN/cm}^2$$

$$\sigma_{B,M} = \frac{M}{W} = \frac{6125\ \text{kNcm}}{736\ \text{cm}^3} = \pm 8{,}32\ \text{kN/cm}^2$$

→ gefährlichste Faser

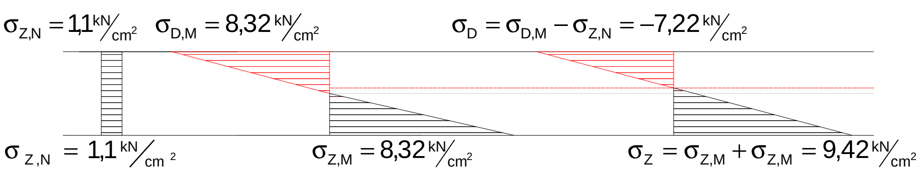
→ Mitte des Trägers

Spannung in Faser unten

$$\sigma_{Z\ ges} = \sigma_{Z,N} + \sigma_{Z,M} = 1{,}1\ \text{kN/cm}^2 + 8{,}32\ \text{kN/cm}^2 = 9{,}42\ \text{kN/cm}^2 \leq \overline{\sigma_Z}$$

Spannung in Faser oben

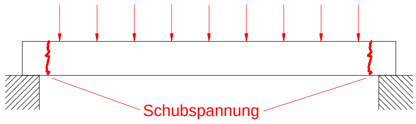
$$\sigma_{D\ ges} = \sigma_{D,N} - \sigma_{D,M} = 1{,}1\ \text{kN/cm}^2 - 8{,}32\ \text{kN/cm}^2 = -7{,}22\ \text{kN/cm}^2 \leq \overline{\sigma_Z}$$



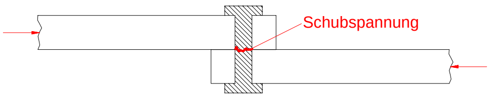
2. *Tangentialspannungen τ*

Sie werden erzeugt durch Schnittkräfte, die in Richtung der Querschnittsfläche wirken, wie z.B. die Querkraft. Tangentialspannungen entstehen bei der Verschiebung, dem Abscheren und dem Verdrehen der Querschnittsteilchen gegeneinander.
Zu den Tangentialspannungen zählen:

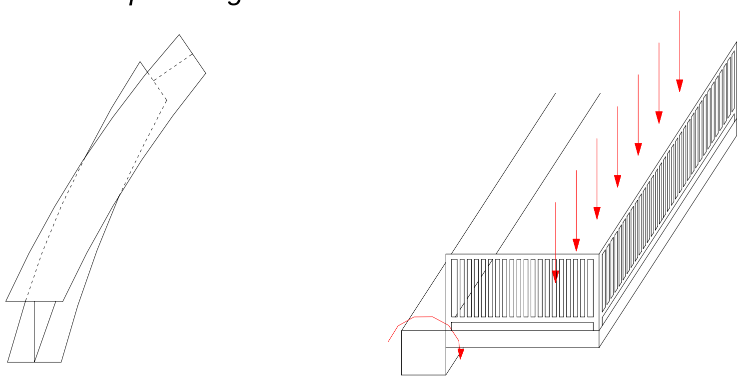
1. *Schubspannungen*



2. *Scherspannungen*

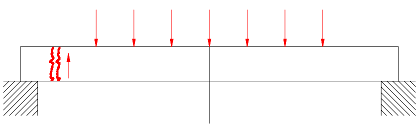


3. *Torsionsspannungen*



2.1 *Schubspannung $\tau_V = \tau_H$*

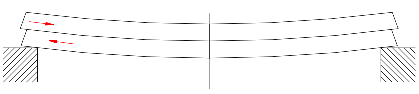
Infolge Belastung eines Trägers, quer zur Stabachse, entstehen außer den Biegemomenten auch Querkräfte, diese verursachen eine Verschiebung nebeneinanderliegender Querschnitte und es entstehen in der Querschnittsfläche Querschubsspannungen τ_V. Da sich der Träger unter der Belastung durchbiegt, die oberen Fasern gedrückt und die unteren Fasern gezogen werden, kommt es auch zur Verschiebung übereinanderliegender Querschnitte. Es entstehen Längsschubspannungen τ_H in Richtung zur Stabachse. In jeder Stelle des Trägers gilt $\tau_V = \tau_H$.



$\tau_V = 0$ weil $Q = 0$

Querschubspannung

$$\tau_V = \tau_H$$



$\tau_H = 0$ weil keine gegenseitige Verschiebung

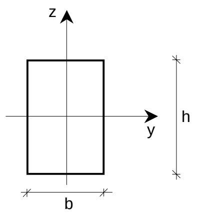
Längsschubspannung

Diese Schubspannungen sind weder über die Trägerhöhe noch über die Trägerlänge gleichmäßig verteilt. Die größten Schubspannungen treten in der Spannungsnulllinie auf; am unteren und oberen Trägerrand sind sie gleich null.

$$\tau_V = \tau_H = \frac{Q \cdot S}{b \cdot I}$$

Q… Querkraft
S… statisches Moment des unterhalb der untersuchten Faser liegenden Trägerteils bezogen auf die Nullfaser (Fläche unterhalb der Faser x dem Abstand der Schwerpunkt der Fläche und der Faser)
I… gesamte Trägheitsmoment
b… Breite der untersuchten Faser
τ… Schubspannung in der untersuchten Faser

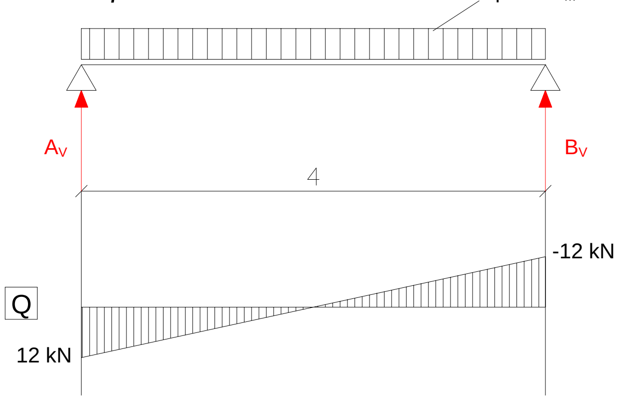
im Fall eines Rechtecks:

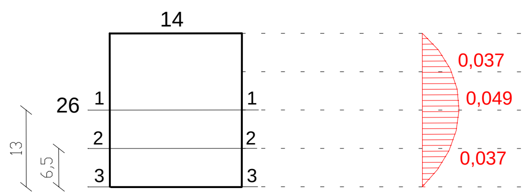


$$\tau = \frac{Q \cdot S}{b \cdot I} = \frac{Q \cdot \left(b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4}\right)}{b \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}} = \frac{Q \cdot \frac{3}{2}}{b \cdot h} =$$

$$= 1{,}5 \cdot \frac{Q}{A}$$

Beispiel:





$$\tau_{1-1} = \frac{Q \cdot S_{1-1}}{b \cdot I} = 0{,}049\ {}^{kN}\!/_{cm^2}$$

$$\tau_{2-2} = \frac{Q \cdot S_{2-2}}{b \cdot I} = 0{,}037\ {}^{kN}\!/_{cm^2}$$

$$\tau_{3-3} = \frac{Q \cdot S_{3-3}}{b \cdot I} = 0\ {}^{kN}\!/_{cm^2}$$

$$Q = 12\ kN$$

$$S_{1-1} = 14 \cdot 13 \cdot \tfrac{13}{2} = 1183\ cm^3$$

$$S_{2-2} = 14 \cdot 6{,}5 \cdot 9{,}75 = 887\ cm^3$$

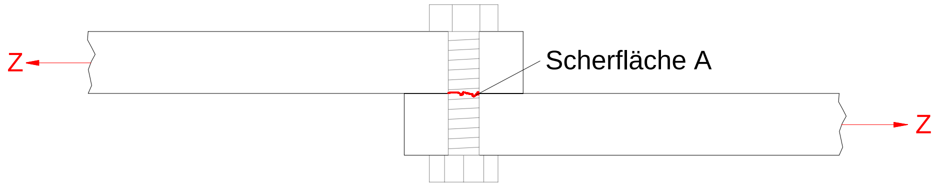
$$S_{3-3} = 0$$

$$b = 14\ cm$$

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12} = 20505\ cm^4$$

2.1 Scherspannung τ_A

Sie treten in der Querschnittsfläche zwischen 2 Stabteilen auf, die auf Abscherung beansprucht werden. Es darf angenommen werden, dass Scherspannungen gleichmäßig über den Querschnitt verteilt sind.

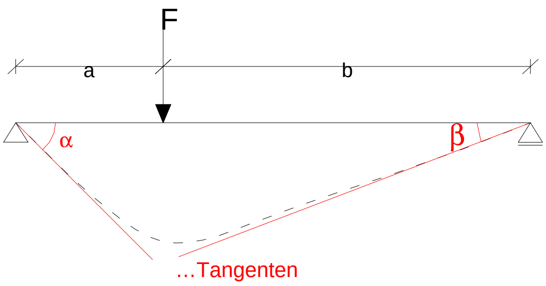


$$\tau_A = \frac{Z}{A} \leq \overline{\tau_A}$$

Die Biegelinie

1. Träger auf zwei Stützen

Die Winkeländerung der Biegelinie eines Trägers auf zwei Stützen kann nach dem Moohr'schen Satz ermittelt werden.



Winkeländerungen:

Winkeländerungen α und β sind die Winkel zwischen den Tangenten zur Biegelinie und der Stabachse. Der Winkel α (β) ist gleich der Auflagerreaktion *A* (*B*) die sich aus dem mit der Momentenlinie belasteten Träger ergibt, dividiert durch E · I.

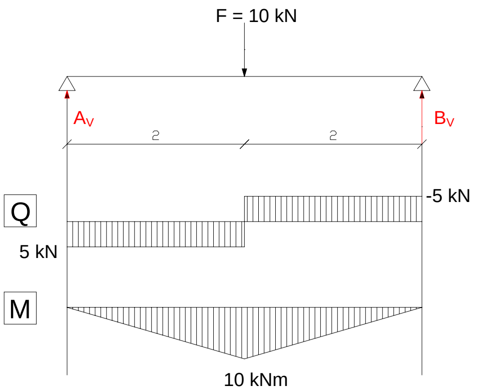
$$\alpha = \frac{A}{E \cdot I} \qquad \beta = \frac{B}{E \cdot I}$$

Durchbiegung:

Die Durchbiegung an irgend einer Stelle des Trägers auf zwei Stützen erhält man, wenn man den Träger mit seiner Momentenlinie belastet und für die betreffenden Stelle das Biegemoment M berechnet und durch E · I dividiert.

$$f_x = \frac{M_x}{E \cdot I}$$

Beispiel:



$$A_V = B_V = 5\text{ kN}$$

$$M_{max} = \frac{F \cdot l}{4} = 10\text{ kNm}$$

Bemessung:

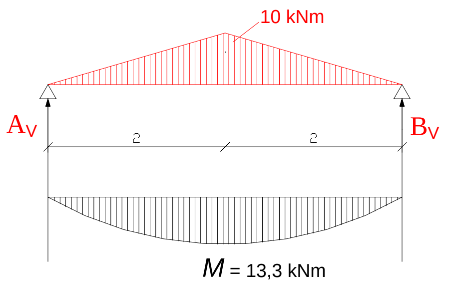
$$\sigma_B = \frac{M}{W} \le \overline{\sigma_B} \qquad \Rightarrow W \ge \frac{M}{\overline{\overline{\sigma_B}}} = 62{,}5\text{ cm}^3$$

gewählt: IPE-Profil 140 $\rightarrow$ $W_y = 77{,}3\text{ cm}^3$
$I_y = 541\text{ cm}^4$

Nachweise:

$$\sigma_B = \frac{M}{W} = \frac{1000\text{ kNcm}}{77{,}3\text{ cm}^3} = 12{,}94\ ^{\text{kN}}\!/_{\text{cm}^2} \le \overline{\sigma_B} = 16\ ^{\text{kN}}\!/_{\text{cm}^2}$$

$$\tau = \frac{Q \cdot S}{b \cdot I} = \frac{5\text{ kN} \cdot 44{,}2\text{ cm}^3}{0{,}47\text{ cm} \cdot 541\text{ cm}} = 0{,}87\ ^{\text{kN}}\!/_{\text{cm}^2} \le \overline{\tau} = 9{,}2\ ^{\text{kN}}\!/_{\text{cm}^2}$$



$$A = B = \frac{10\text{ kNm}^2}{21000\ ^{\text{kN}}\!/_{\text{cm}^2} \cdot 541\text{ cm}^4} = 0{,}009$$

$$\Rightarrow \tan^{-1} 0{,}009 = 0{,}5°$$

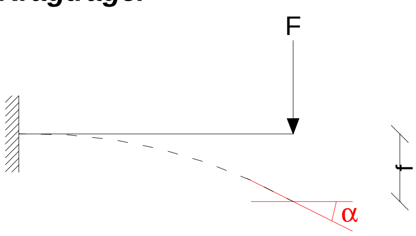
$$M_{(l/2)} = 13{,}3\text{ kNm}^3$$

$$f_{(l/2)} = \frac{M}{E \cdot I} = \frac{13{,}3\text{ kN} \cdot 10^6\text{ cm}^3}{21000\ ^{\text{kN}}\!/_{\text{cm}^3} \cdot 541\text{ cm}^4} = 1{,}17\text{ cm}$$

Alternative aus Tabellenbuch (Wenderhorst S. 327)

$$f = \frac{1}{3} \cdot \frac{F}{E \cdot I} \cdot \frac{a^2 \cdot b^2}{l} = 1{,}174\text{ cm}$$

2. *Kragträger*



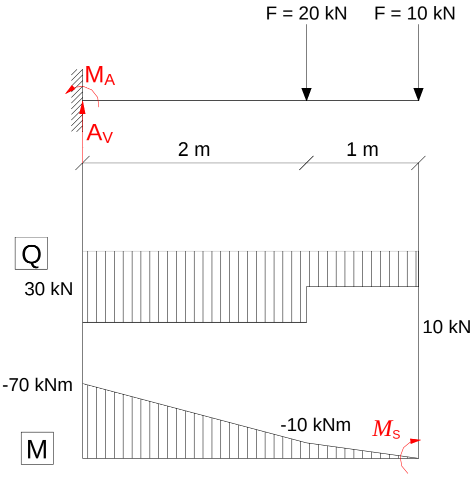
Es gilt: der Winkel α ist gleich dem Inhalt der Momentenfläche dividiert durch E · I.

$$\alpha = \frac{F_{(M)}}{E \cdot I}$$

Die Durchbiegung f an der Spitze des Kragträgers ist gleich dem Moment des mit der Momentenfläche belasteten Trägers in Bezug auf das freie Trägerende dividiert durch E · I.

$$f = \frac{M_S}{E \cdot I}$$

Beispiel:



$$A_V = 30\text{ kN}$$

$$M_A = 70\text{ kNm}$$

$$\sigma_B = \frac{M}{W} \leq \overline{\sigma_B} \qquad \Rightarrow W \geq \frac{M}{\overline{\sigma_B}} = 437{,}5\text{ cm}^3$$

gewählt: I-Profil 260 $\rightarrow$ $W_y = 442\text{ cm}^3$
$I_y = 5740\text{ cm}^4$
$S = 257\text{ cm}_3$
$s = b = 9{,}4\text{ mm}$

Nachweise:

$$\sigma_B = \frac{M}{W} = \frac{7000\text{ kNcm}}{442\text{ cm}^3} = 15{,}84\ \text{kN}/\text{cm}^2 \leq \overline{\sigma_B} = 16\ \text{kN}/\text{cm}^2$$

$$\tau = \frac{Q \cdot S}{b \cdot I} = \frac{30\text{ kN} \cdot 257\text{ cm}^3}{0{,}94\text{ cm} \cdot 5740\text{ cm}} = 1{,}43\ \text{kN}/\text{cm}^2 \leq \bar{\tau} = 9{,}2\ \text{kN}/\text{cm}^2$$

Winkeländerung:

$$F_{(M)} = 10\text{ kNm} \cdot 1\text{ m} \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{70\text{ kNm} + 10\text{ kNm}}{2} \cdot 2\text{ m} = 85\text{ kNm}^2$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{F_{(M)}}{E \cdot I} = 0{,}04°$$

Durchbiegung:

$$M_S = 183{,}33\text{ kNm}^2$$

$$f = \frac{M_S}{E \cdot I} = \frac{183{,}33\text{ kN} \cdot 10^6\text{ cm}^3}{21000\ \text{kN}/\text{cm}^2 \cdot 5740\text{ cm}^4} = 1{,}52\text{ cm}$$

OBERSCHULE FÜR GEOMETER „PETER ANICH“, BOZEN

- Fachrichtung Baubetrieb -

Skripte aus 5 Jahren Oberschule

Diese Arbeit soll als didaktische Unterlage für den Schulunterricht oder als Nachschlagewerk dienen.

Diese Arbeit erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Ich weise jegliche Verantwortung in Bezug auf Inhaltsfehler und Fehlen von Textteilen von mir. Ich bitte aber darum, mir alle Fehler mitzuteilen, damit ich die Unterlagen verbessern und erweitern kann.

Moroder Daniel
Tinderlaweg 13A
39046 St. Ulrich
daniel@moroder.de

St. Ulrich, September 2001