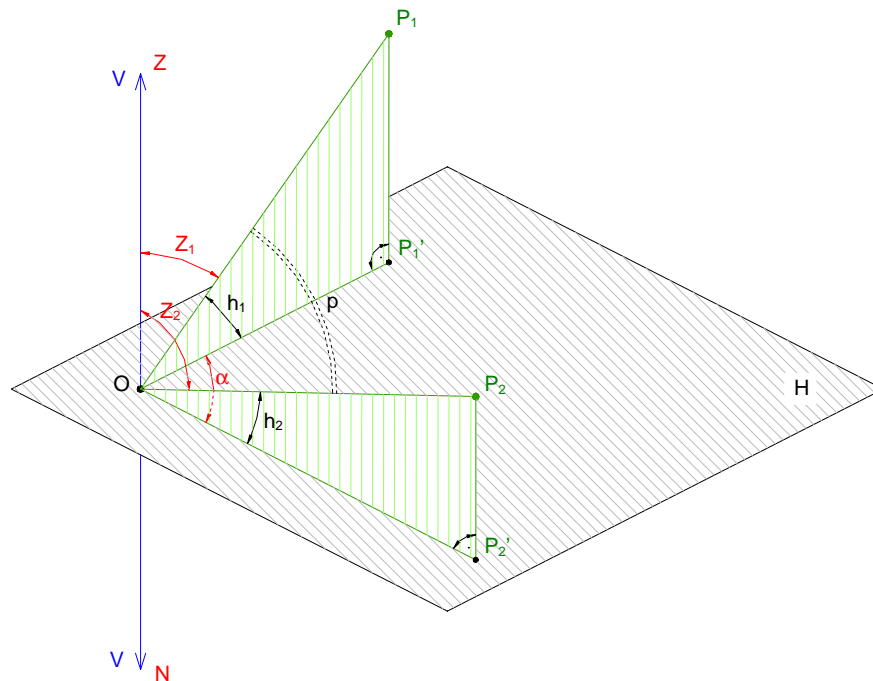


# MESSEN VON RICHTUNGEN UND WINKELN

## - DER THEODOLIT -



- H... Horizontalebene  
 O... Ursprung (Scheitelpunkt, Instrumentenstandpunkt)  
 V... Vertikallinie (Lotlinie, Stehachse des Instrumentes, Drehachse)  
 Z... Zenit  
 N... Nadir  
 P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>... Zielpunkte (im Raum)  
 P<sub>1</sub>', P<sub>2</sub>'... Projektionen von P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub> in Horizontalebene H  
 α... Horizontalwinkel zwischen P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>  
 Z<sub>1</sub>, Z<sub>2</sub>... Vertikalwinkel als Zenitwinkel (Zenitdistanz)  
 h<sub>1</sub>, h<sub>2</sub>... Vertikalwinkel als Höhenwinkel  
 p... Raumwinkel zwischen P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>

$\left. \begin{array}{l} OP_1P_1' \\ OP_2P_2' \end{array} \right\}$  Vertikalebene

### Aufbau Theodolit

Der Theodolit besteht aus einem unbeweglichen Unterbau mit dem Horizontalkreis; dem um die Vertikal- oder Stehachse drehbare Oberteil (wird auch als Alhidade bezeichnet) mit den Ablesevorrichtungen für den Horizontal- und Vertikalkreis und dem um die Kippachse drehbaren Fernrohr mit dem Vertikalkreis.

Steh-, Ziel- und Kippachse sollten sich in einem Punkt schneiden und paarweise aufeinander senkrecht stehen.

Stehachse  $\perp$  Kippachse

Zielachse  $\perp$  Kippachse

Der Mittelpunkt des Horizontalkreises soll in der Stehachse liegen, der Mittelpunkt des Vertikalkreises in der Kippachse.

Mit den Dreifußschrauben des Unterbaus und Libellen kann die Stehachse lotrecht gestellt werden. Die Kippachse liegt dann horizontal, beim Kippen des Fernrohres bewegt sich die Zielachse in eine Vertikalebene.

### **Messgerechte Aufstellung**

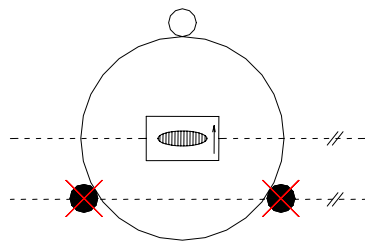
- 2 Bedingungen: 1) Stehachse lotrecht (*Horizontierung*)  
2) Stehachse durch Zentrum (*Zentrierung*)

#### *Praktischer Vorgang:*

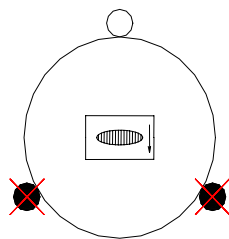
1. Stativ mit möglichst gut horizontierten Stativteller über den Bodenpunkt aufstellen  
Die kreisrunde Öffnung soll über den Punkt sein
2. die Stativbeine möglichst fest in den Boden treten
3. Instrument aufsetzen und befestigen
4. *Grobzentrierung* mit optischen Lot und Fußschrauben
5. *Grobhorizontierung* mit Stativbeinen und Dosenlibelle
6. *Feinhorizontierung* über Rohlibelle (Vertikalachsenlibelle) mit den Fußschrauben
7. *Feinzentrierung* durch Verschieben des Gerätes am Stativteller
8. Kontrolle der Horizontierung und Zentrierung

#### → *Horizontierung mit Alhidadenlibelle*

1. Stellung



2. Stellung

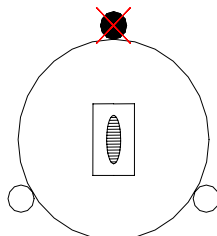


Drehung um  $200^\circ$

→ Prüfung der Libelle

Die Hälfte des Ausschlages wird durch die Dejustierung der Libelle hervorgerufen, kann mit Justierschrauben weggestellt werden.

3. Stellung



#### *Vorbereitung des Fernrohrs:*

Ziel und Fadenkreuz müssen im Fernrohr scharf erscheinen und dürfen der Messung dem Beobachter angepasst werden. Man visiert dazu einen weit entfernten Gegenstand an (oder eine kontrastlose Fläche mit Fernrohreinstellung  $\infty$ ), stellt mit der Fokussierung das Bild scharf und mit dem Okularbild (Dioptriering) das Fadenkreuz. Es soll gewährleistet sein, dass sich der Zielpunkt im Fernrohr gegenüber dem Fadenkreuz nicht bewegt (Bezeichnung

„Tanzprobe“ oder paralaxenfreies Strichkreuz). Bei der Messung selber dürfte keine Änderung der Dioptrieeinstellung mehr notwendig sein.

#### Kreislagen:

Zielungen und Ablesungen an den Teilkreisen können in zwei Fernrohrlagen durchgeführt werden. Befindet sich der Vertikalkreis links vom Fernrohr so spricht man von „Kreislage links“ oder „I. Kreislage“. Befindet sich der Vertikalkreis rechts vom Fernrohr so spricht man von „Kreislage rechts“ oder „II. Kreislage“.

### Klassifizierung der Theodolite

→ optische Theodolite

→ elektronische Theodolite

Unterscheidung liegt lediglich in der Art der Abmessung bzw. der Messwertbestimmung / -ermittlung.

#### Genauigkeit:

→ *Theodolit niedriger Genauigkeit (Bautheodolit / Minutentheodolit)*

Anwendungen: Baumessungen; einfache Geländeaufnahmen

Ablesung:  $\frac{1}{10}^g$  werden direkt abgelesen  
 $1^{cgon}$  wird geschätzt

Teilkreis  $\varnothing$  50 – 80 mm

Fernrohvergrößerung: 15 – 20 x

→ *Theodolit mittlerer Genauigkeit (Ingenieurtheodolit)*

Anwendungen: Polygonierung, einfache Geländeaufnahmen

Ablesung:  $1^{cgon}$  (0,01<sup>g</sup>) direkt  
 $1^{mgon}$  (0,001<sup>g</sup>) geschätzt

Teilkreis  $\varnothing > 80$  mm

Ableseeinrichtungen: - Skalenmikroskop  
 - Strichmikroskop mit optischen Mikrometer  
 - Koinzidenzmikroskop

Zusatzeinrichtungen: - Zusatz zur optischen Streckenmessung mit den Reichenbach'schen Distanzfäden

- Einrichtung zur elektronischen Distanzmessung (zusätzliches Gerät) → IR-Wellen, Laser

Reichweite: 1 km

Genauigkeit: cm

Messdauer: einige sec

- Repetitionssystem (-einrichtung)

Teilkreis verstellbar

→ spezifisches Verfahren zur Winkelmessung um Winkel an verschiedenen Stellen des Kreisringes zu messen (Linderung von Teilkreiseinteilungsfehler)

→ *Theodolit hoher Genauigkeit (Sekundentheodolit)*

Anwendungen: - Feinabsteckung, Spezialanwendungen  
 - Triangulierung im Lagefestpunktnetz

Ablesung: 0,001<sup>gon</sup> direkt  
 0,0001<sup>gon</sup> (1<sup>cc</sup>) geschätzt

z.B.  $134,347 \pm 0,2 - 0,3^{mgon}$

Ableseeinrichtungen: Koinzidenzmikroskop mit optischer Ablesung

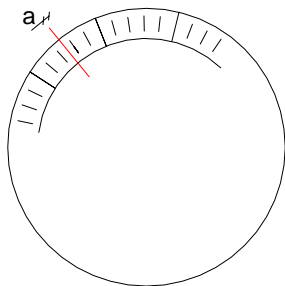
**Teilkreise:**

Teilkreise bestehen aus einer Glasscheibe mit einer Winkelteilung (in Grad oder Neugrad). Die Fertigung dieser Teilung kann umso genauer angenommen werden, umso größer der Durchmesser. Ablesemikroskope oder elektronische Abtastsysteme ermöglichen Feinablesungen durch Interpolation benachbarter Teilstriche.

**Ableseeinrichtungen:**

→ *Strichmikroskop*

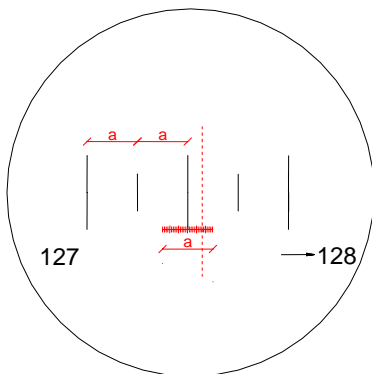
Ablesemikroskop mit einem Indexstrich



→ *Skalenmikroskop*

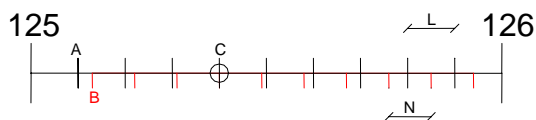
Skala die sich in der Bildebene des Messmikroskopes befindet und deren Länge dem Strichabstand des abgebildeten Teilkreises entspricht und für die Ablesung eingesetzt wird. Die Länge der Skala ist dem Teilungsintervall angepasst.

„Run“-Fehler: Teilstrichintervall und Skala weisen nicht dieselbe Länge auf.



Nonius: ist eine Hilfsteilung (-skala) bei der Hauptskala 10 Teile der Noniuskala entsprechen.

Wenn der n-te Strich des Nonius mit einem n-ten Strich der Hauptskala zusammenfällt (C) so gilt:



$$\overline{AC} = n \cdot L$$

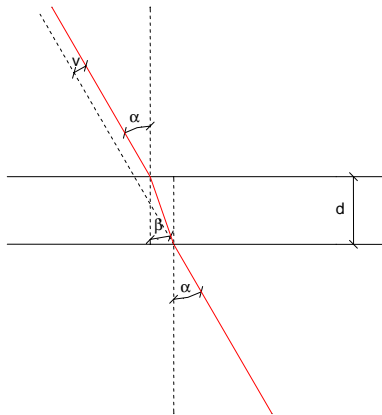
$$\overline{BC} = n \cdot N$$

$$\overline{AB} = \overline{AC} - \overline{BC} = n \cdot (L - N)$$

$$\overline{AB} = n \cdot L \cdot \left(1 - \frac{9}{10}\right) = n \cdot \frac{L}{10}$$

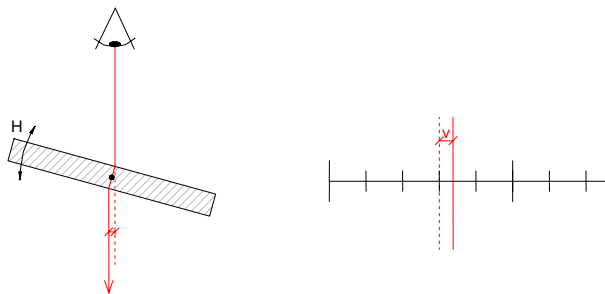
→ Ablesung mit Mikrometer

Das Mikrometer ist ein bewegliches Ablenkelement in Form einer Plan- bzw. Planparallelplatte mit dem das Bild des Kreisausschnittes zur Ablesemarke messbar verschoben werden kann.



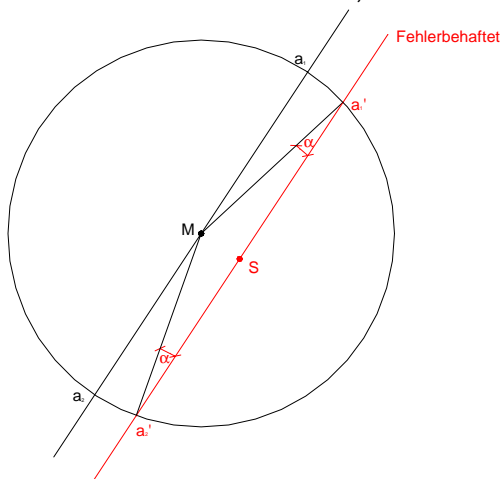
$$v = \frac{d}{\cos \beta} \cdot \sin(\alpha - \beta)$$

$$v = v(d, \alpha, n)$$



→ Koinzidenzmikroskop

Zwei gegenüberliegende Kreisstellen werden im Ablesemikroskop gemeinsam abgebildet, eine Teilung erscheint leserichtig, die andere kopfstehend. Die Ablesung besteht in einem Mittel dieser beiden Werte, die sich um  $200^g$  voneinander unterscheiden.



$$a_2 = a_1 + 200^g$$

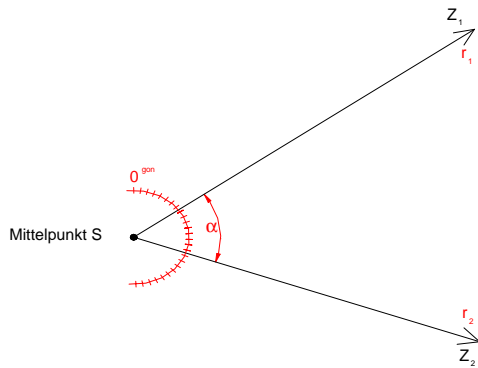
$$a_1 = a_1 + \alpha$$

$$a_2 = a_2 - \alpha$$

$$\frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{a_1 + \alpha + a_2 - \alpha}{2} = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

### Horizontalwinkelmessung

**Def. Winkel:** Differenz zweier Richtungen (Richtungsmessungen)

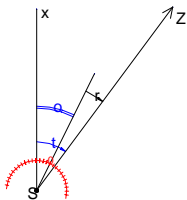


S... Scheitel (Instrumentenstandpunkt)  
 Z<sub>1</sub>, Z<sub>2</sub>...Schenkel  
 r<sub>1</sub>, r<sub>2</sub>...zu messende Richtungen  
 α... Winkel:  $\alpha = r_2 - r_1$

### Orientierung o

$o = t - r$

$\Rightarrow t = r + o$  ...Aufnahme  
 $\Rightarrow r = t - o$  ...Absteckung



Die Orientierung des Horizontalkreises o kann über die Messung der Richtungen zu einem bekannten Zielpunkt bestimmt werden.

### Beobachtungsverfahren:

- 2 Zielpunkte: einfache Winkelmessung
- mehr als 2 Zielpunkte: Satzmessung (satzweise Richtungsmessung)  
 Winkelmessung in allen Kombinationen

#### Satzmessung (vollständiger Richtungssatz)

Die Richtungen zu den Zielpunkten werden in einer bestimmten Reihenfolge in zwei Kreislagen gemessen.

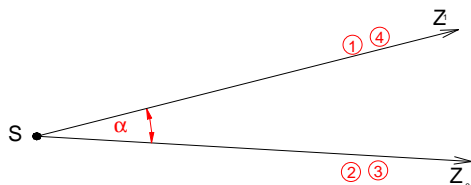
#### Halbsatz

Die Richtungsmessung zu den Zielpunkten in einer bestimmten Reihenfolge in nur einer Kreislage.

Die Reihenfolge der Zielungen und das Messen in zwei Kreislagen ermöglichen die Elimination von systematischen Instrumentenfehlern.

Beispiel: einfache Winkelmessung aus vollständigem Richtungssatz

Standpunkt	Zielpunkt	I Kreislage	II Kreislage	Mittel	Winkel
S	Z <sub>1</sub>	1 321,4225	4 121,4231	321,4228	(0,0000)
	Z <sub>2</sub>	2 34,5713	3 234,5702	34,5708	113,1480



**Begründung:**

1. Das Mittel der Richtungsmessungen in zwei Kreislagen ist zum großteil befreit von systematischen Instrumentenfehlern.
2. Die Reihenfolge der Zielungen und Messungen berücksichtigt äußere Einflüsse die sich im Messzeitraum linear verhalten.
3. Zur Steigerung der Genauigkeit kann der Richtungssatz wiederholt werden, wobei der Teilkreis gleichmäßig zu nutzen ist, dadurch werden systematische Fehler in der Kreisteilung erfasst.

**Genauigkeitsabschätzung:**

Grundlage: Genauigkeit einer Messung (Richtung)

→ Geräteangabe

→ aus vielen Messungen

z.B.  $m_r = \pm 0,3^{\text{mgon}}$

$$\alpha = \frac{(r_I^{Z_2} - r_{II}^{Z_1}) + (r_{II}^{Z_2} - r_I^{Z_1})}{2}$$

$$m_\alpha^2 = \frac{4 m_r^2}{4} = m_r^2$$

Beispiel: *Satzmessung (Zielpunkte >2)*

Auch bei der Satzmessung ist eine genaue Reihe der Zielungen einzuhalten, d.h. man misst alle Zielpunkte der Reihen nach im Uhrzeigersinn in erster Kreislage und beginnend mit dem letzten Zielpunkt entgegen dem Uhrzeigersinn in 2. Kreislage.

Ziel-punkt	Kreislage I [ <sup>g</sup> ]	Kreislage II [ <sup>g</sup> ]	Mittel [ <sup>g</sup> ]	reduzierter Satz [ <sup>g</sup> ]	d [ <sup>cc</sup> ]	v [ <sup>cc</sup> ]	vv	Satz-verschiebung
3	249,8175	49,8173	249,8174	0,0000	0	-1	1	
6	386,6204	186,6216	386,6210	136,8036	-2	-3	9	
7	16,5921	216,5924	16,5923	166,7749	0	-1	1	
8	39,1311	239,1325	39,1318	189,3144	5	4	16	
9	56,9782	256,9801	56,9792	207,1618	1	0	0	0,8
3	274,8182	74,8196	274,8189	0,0000	0	-6	36	
6	11,6206	211,6225	11,6216	136,8027	7	1	1	
7	41,5922	241,5936	41,5929	166,7740	8	2	4	
8	64,1322	264,1335	64,1329	189,3140	9	3	9	
9	81,9792	281,9808	81,9800	207,1611	7	1	1	6,2
3	299,8337	99,8345	299,8341	0,0000	0	6	36	
6	36,6367	236,6387	36,6377	136,8036	-2	4	16	
7	66,6088	266,6114	66,6101	166,7760	-12	-6	36	
8	89,1493	289,1503	89,1498	189,3157	-8	-2	4	
9	106,9964	306,9966	106,9965	207,1624	-6	0	0	-5,6
3	374,7692	174,7690	374,7691	0,0000	0	1	1	
6	111,5723	311,5731	111,5727	136,8036	-2	-1	1	
7	141,5428	341,5442	141,5435	166,7744	4	5	25	
8	164,0838	364,0854	164,0846	189,3155	-6	-5	25	
9	181,9306	381,9317	181,9312	207,1621	-2	-1	1	-1,2

**reduzierter Satz:** die gemittelten Richtungen des ersten Zieles wird von allen weiteren gemittelten Richtungen subtrahiert.

**Satzmittel:** erhält man indem man die reduzierten Richtungen der einzelnen Sätze mittelt.

Zielpunkt	Satzmittel
3	0,0000 <sup>g</sup>
6	136,8034 <sup>g</sup>
7	166,7748 <sup>g</sup>
8	189,3149 <sup>g</sup>
9	207,1618 <sup>g</sup>

**Differenz:** Differenz zwischen Satzmittel und den reduzierten Richtungen der einzelnen Sätze

$$d = \text{Satzmittel} - \text{reduzierter Satz}$$

**Satzverschiebung:**  $\frac{[d]}{n}$

Verbesserung: die Verbesserung erhält man, indem man die Satzverschiebungen von den einzelnen Differenzen subtrahiert.

$$v = d - \frac{[d]}{n} \quad [v] = 0 \quad (\rightarrow \text{ungerundete Werte})$$

**Fehler:**

*Mittlerer Fehler einer gemessenen Richtung*

$$m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{(k-1) \cdot (n-1)}} = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{3 \cdot 4}} = \pm \sqrt{\frac{223}{12}} = \pm 4,31^{\text{cc}}$$

*Mittlerer Fehler einer Richtung des Satzmittels*

$$M = \pm \frac{m}{\sqrt{k}} = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{k \cdot (k-1) \cdot (n-1)}} = \pm \sqrt{\frac{223}{4 \cdot 3 \cdot 4}} = \pm 2,16^{\text{cc}}$$

$$m_{\alpha} = \pm M \cdot \sqrt{2} = \pm 3,05^{\text{cc}}$$

$$m_{\beta} = \pm M \cdot \sqrt{2} = \pm 3,05^{\text{cc}}$$

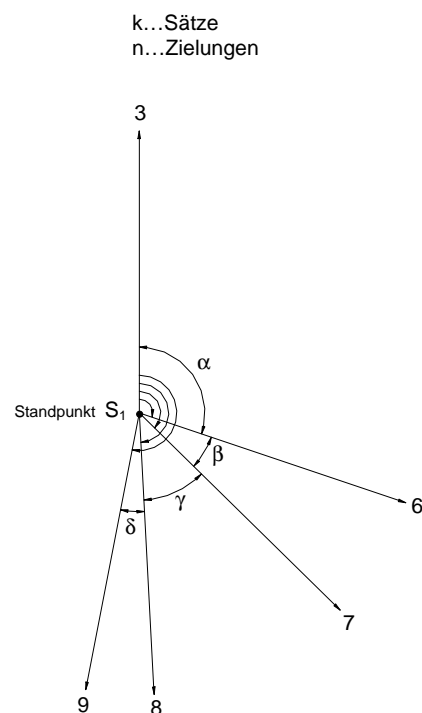
$$m_{\gamma} = \pm M \cdot \sqrt{2} = \pm 3,05^{\text{cc}}$$

$$\alpha = 136,8034^{\text{g}} \pm 3,05^{\text{cc}}$$

$$\beta = 29,9715^{\text{g}} \pm 3,05^{\text{cc}}$$

$$\gamma = 22,5401^{\text{g}} \pm 3,05^{\text{cc}}$$

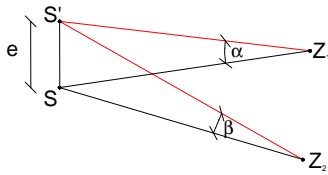
$$\delta = 17,8469^{\text{g}} \pm 3,05^{\text{cc}}$$



**Theodolitfehler mit Einfluss auf Horizontalwinkelmessung:**

⇒ **systematische Fehler**

Ursache: Aufstellung und Zentrierung



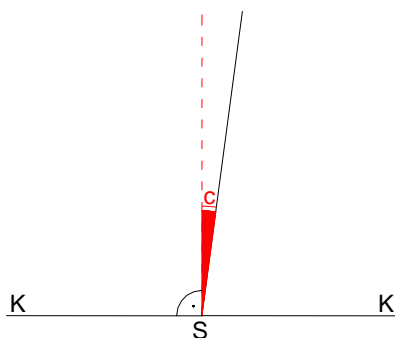
$$e = \hat{\alpha} \cdot \overline{SZ} \rightarrow \alpha$$

→ **Zielachsfehler** (Kollimationsfehler)

die Zielachse ist nicht senkrecht auf die Kippachse und bewegt sich deshalb nicht in einer Vertikalebene sondern auf einem Kegelmantel.

$$f_c = \frac{c}{\cos h}$$

h... Höhenwinkel  
 c... Zielachsfehler  
 f<sub>c</sub>... Einfluss des Zielachsfehlers (auf gemessene Richtung)



Bei horizontalen Messungen ist der Fehler c oder minimal.

f<sub>c</sub> wird mit steilen Winkel größer

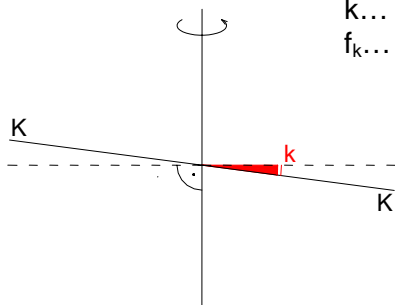
Der Zielachsfehler kann durch Messungen in 2 Kreislagen eliminiert werden.

→ **Kippachsfehler** (Kippachsneigung)

Die Kippachse steht nicht senkrecht auf der Stehachse oder Drehachse. Die Zielachse beschreibt beim Kippen des Fernrohrs eine schräge Ebene.

$$f_k = k \cdot \tan h$$

h... Höhenwinkel  
 k... Kippachsneigung  
 f<sub>k</sub>... Einfluss des Kippachsfehlers (auf horizontale Richtung; Hz-Winkelmessung)



Bei Messungen in zwei Kreislagen und Mittelbindung wird der Kippachsfehler eliminiert.

→ **Stehachsfehler**

Stehachse weicht von der Lotrichtung ab.

In der Folge schwankt die Kippachse je nach Richtung zwischen +v und -v um die Horizontale.

$$f_v = v \cdot \tan h \cdot \cos \varepsilon$$



- h... Höhenwinkel
- v... Stehachsfehler
- $f_v$ ... Einfluss des Stehachsfehlers (auf horizontale Richtung; HZ-Winkelmessung)
- $\varepsilon$ ... Winkel zwischen Ebene aus Lotrichtung und Stehachse und der Kippachse

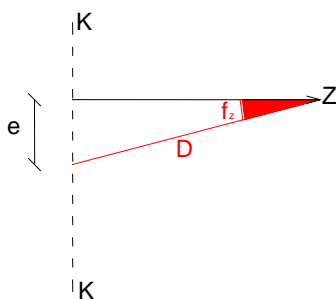
Der Stehachsfehler ist kein Instrumentenfehler, sondern ein Aufstellfehler. Er kann durch keine Messanordnung beseitigt werden. Durch sorgfältiges Horizontieren (Aufstellung) kann der Fehler vermieden werden.

⇒ **Exzentrizitätsfehler**

→ *Exzentrizität der Visiereinrichtung (Ziellinie)*

Zielachse schneidet nicht die Stehachse, die drei Achsen sind windschief.

$$\hat{f}_z = \frac{e}{D}$$



- e... Exzentrizität der Ziellinie
- D... Entfernung des Zielpunktes
- $f_v$ ... Einfluss des Exzentrizität der Ziellinie

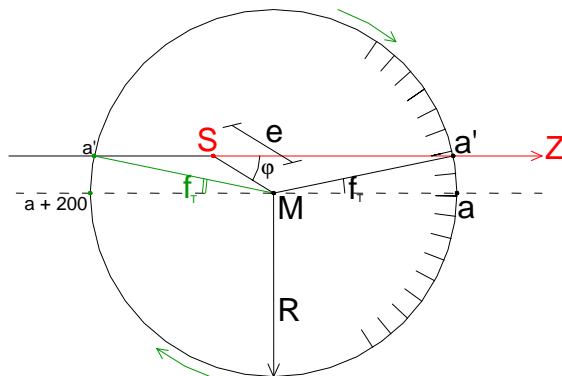
Beispiel:  $f_z = 1^{mgon}$   
 $D = 10 \text{ m}$

$$e = ? = 0,001^g \frac{\pi}{200} \cdot 10 \text{ m} = 1,57 \cdot 10^{-4} \approx 0,16 \text{ mm}$$

Fehler kann durch Messung in 2 Kreislage eliminiert werden.

→ *Exzentrizität des Teilkreises*

Mittelpunkt des Horizontalkreises fällt nicht in die Stehachse

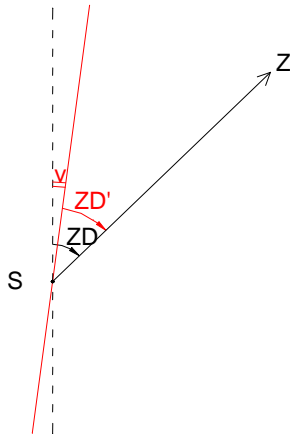


$$f_r = \frac{e}{R} \cdot \sin \varphi$$

Dieser Fehler kann durch Messen in 2 Kreislagen eliminiert werden; weiters kann er durch diametrale Kreisablegung eliminiert werden.

**Theodolitfehler mit Einfluss auf Vertikalwinkelmessung:**

Der Vertikalkreis der zentrisch auf der Kippachse angeordnet ist, dreht sich mit dem Fernrohr mit. Die Ableseeinrichtung befindet sich am Oberbau. Die Ablesung am Vertikalkreis muss grundsätzlich unabhängig von der restlichen Stehachsneigung sein.

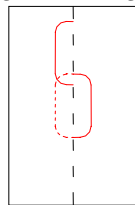


ZD... Zenitdistanz (-winkel)  
 v... Stehachsfehler (<sup>mgon</sup>)  
 $ZD' = ZD \pm v$ ... Zenitdistanz gemessen, bezogen auf Stehachse, Aufstellung

Die Ebene die durch Kippachse und den Ableseindex des Vertikalkreises festgelegt ist, soll immer die gleiche Neigung mit der Horizontalebene einschließen.

Um dies zu erreichen kann der Ableseindex mittels einer Index- oder Versicherunglibelle vor jeder Ablesung so eingerichtet werden, dass man für den Vertikalwinkel einen von der Stehachse unabhängigen Bezug schafft.

→ Koinzidenzlibelle



← optisch getrennt

Bei modernen Geräten wird dieser variable Einfluss der restlichen Stehachsneigung über einen automatischen Höhenindex berücksichtigt (→ Kompensator).

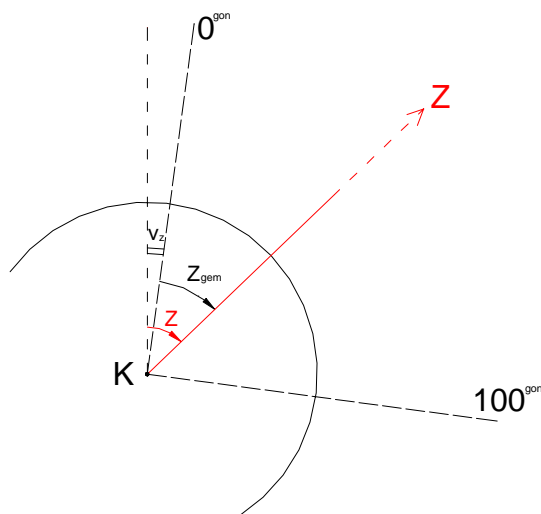
Fehler der Versicherunglibelle bewirken einen konstante Verfälschung der gemessenen Zenitwinkel um den sogenannten **Indexfehler**.

Messungen in 2 Kreislagen ermöglichen die Bestimmung dieses Indexfehlers und somit auch die Korrektur der Messungen.

I Kreislage:  $Z_{gem} = ZD + v_z$

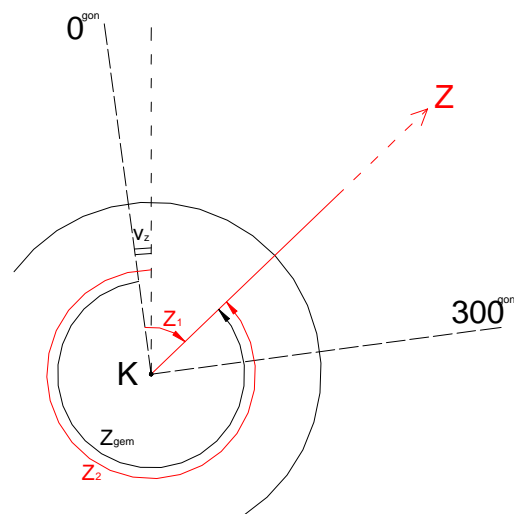
II Kreislage:  $Z_{gem} = 400 - (ZD + v_z)$

1. Kreislage



$Z_1 = Z_{1\ gem} + v_z$

2. Kreislage



$Z_2 = Z_{2\ gem} + v_z$   
 $Z_1 + Z_2 = 400^{gon}$

$$Z = \frac{400^g + (Z_{I\text{Kl gem}} - Z_{II\text{Kl gem}})}{2} \dots \text{Zenitdistanz (verbessert)}$$

$$v_z = \frac{400^g - (Z_{I\text{Kl gem}} + Z_{II\text{Kl gem}})}{2} \dots \text{Indexfehler}$$

### Elektronische Distanzmessung

#### (Entfernungsmessung mit elektronischen Wellen)

seit 1960: mindestens gleichwertiges Messverfahren neben Winkelmessung

Messprinzip: - Laufzeitmessung → „lange“ Strecken

- Phasenmessung → praktische Vermessung

- Interferenzmessung → Labormessung, „kurze Strecken“

**Def. Welle:** örtlich und zeitlich wiederholender Schwingungszustand, der sich in eine bestimmte Richtung fortpflanzt.

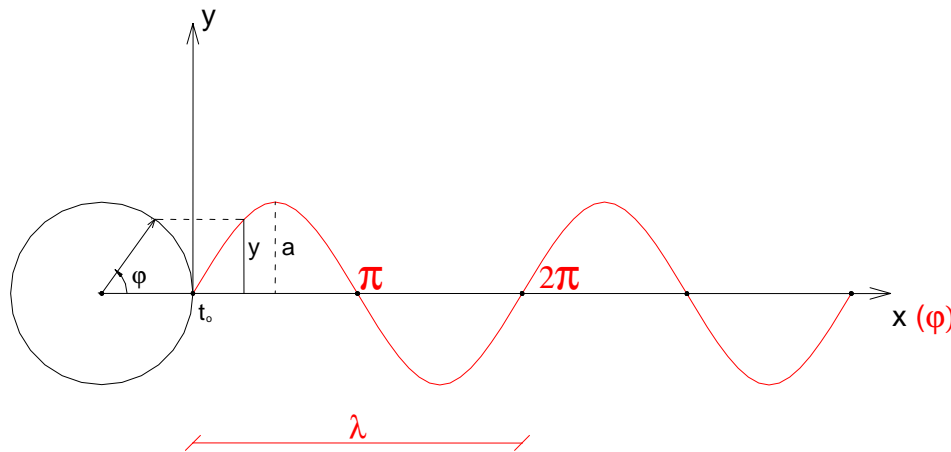
Man unterscheidet zwischen:

Longitudinalwellen: Schwingungsrichtung und Ausbreitung fallen zusammen

Transversalwellen: Schwingungsrichtung und Ausbreitung stehen senkrecht zueinander

Die Schwingung der Welle kann durch Teilchen des Mediums erfolgen (Luft, Wasser) oder durch die Schwingung der elektromagnetischen Wellen (elektromagnetisches Feld).

Elektromagnetische Wellen brauchen kein Medium um sich ausbreiten zu können (Licht- / Radiowellen auch im Vakuum).



$\varphi$ ... Phase zur Zeit  $t$  am Ort  $x$

$\omega$ ... Winkelgeschwindigkeit Kreisfrequenz

$a$ ... Amplitude

$\lambda$ ... Wellenlänge

$f$ ... Frequenz (Schwingungen/Sekunde)

1 Hz

Dimension:  $s^{-1}$

Ausbreitungsgeschwindigkeit:

$$v = \lambda \cdot f$$

Phase  $\varphi = \omega \cdot t$

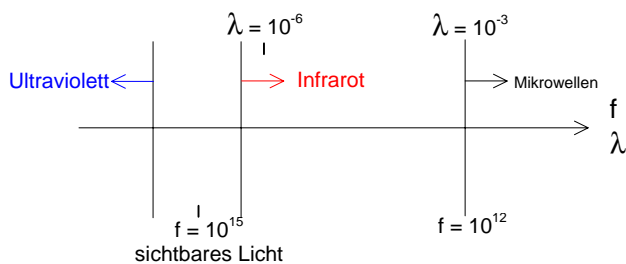
### Ausbreitung elektromagnetischer Wellen

$c_0$ ... Lichtgeschwindigkeit im Vakuum

$$c_0 = 299.792.458 \text{ m/s}$$

Für die Entfernungsmessung mit elektromagnetischen Wellen werden eingesetzt:

- sichtbares Licht  $f = 10^{15}$  ( $\lambda = 10^{-6} - 10^{-7}$ )  
 $v = c_0 = f \cdot \lambda$   
 → Laser
- Infrarot (lichtnahes Infrarot)  $\lambda \approx 10^{-6}$
- Mikrowellen  $f = 10^{12} - 10^9$   
 breiten sich witterungsunabhängig aus



### Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in der Atmosphäre

$c_0$ ... Lichtgeschwindigkeit im Vakuum

$c$ ... Lichtgeschwindigkeit in der Atmosphäre

$n$ ... Brechungskoeffizient (Luft)

$$c = \frac{c_0}{n}$$

$$n = \frac{c_0}{c}$$

$$c_0 = c \cdot n$$

$$n_{\text{Luft}} \approx 1$$

$$n_{\text{Luft}} = n(p, t, e, \lambda)$$

$p$ ... Luftdruck

$t$ ... Temperatur

$e$ ... Luftfeuchtigkeit

$\lambda$ ... Wellenlänge

Brechungskoeffizient für Lichtwellen  $n_L$

1) Berechnung der Gruppenbrechungsindex bei Normatmosphäre ( $t = 0^\circ\text{C}$ ;  $p = 1013,25 \text{ mbar}$ )

$$(n_{\text{Gr}} - 1) \cdot 10^6 = 287,604 + 3 \cdot \frac{1,6288}{\lambda^2} + 5 \cdot \frac{0,0136}{\lambda^4} \quad \text{„BARREL - SEARS“}$$

$\lambda$ ... Wellenlänge in  $\mu\text{m}$

2) Berechnung des Brechungsindex für die aktuelle Atmosphäre  $n_L$

$$(n_L - 1) \cdot 10^6 = 987 \cdot p \cdot \frac{n_{\text{Gr}} - 1}{1 + \alpha \cdot t} - \frac{4,1 \cdot 10^{-8} \cdot e}{1 + \alpha \cdot t}$$

$$n_L \approx 1,0003$$

$\alpha$ ... Ausdehnungskoeffizient der Luft = 0,003661

$t$ ... Temperatur in  $^\circ\text{C}$

$p$ ... Luftdruck in mbar

$e$ ... Luftfeuchtigkeit

Partialdampfdruck des Wassers in der Luft in mbar

$e = E_W - A \cdot p \cdot (t - t_W)$ ... Formel von Sprung

$E_W$ ... Sättigungsdampfdruck für die Feuchttemperatur (mbar)

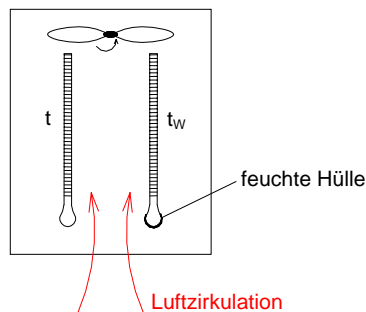
$A$ ... Psychrometerkonstante

$A = 0,000662$  ...bei Messungen über Wasser

$A = 0,000583$  ...bei Messungen über Eis

$t, t_w$ ... Temperatur des trockenen / feuchten Thermometers

(Aspirations)Psychrometer



Die Temperaturdifferenz ist ein Maß für die Luftfeuchtigkeit

$$E(t) = 6,1052 \cdot 10^{\frac{a \cdot t}{b+t}}$$

„MAGNUS - TETENS“

	a	b
über Wasser	7,5	237,3
über Eis	9,5	265,5

E... Sättigungsdampfdruck in mbar

f... relative Luftfeuchtigkeit % (Hygrometer)

$$e = E \cdot \frac{f}{100}$$

### 3) Berechnung der aktuellen Ausbreitungsgeschwindigkeit

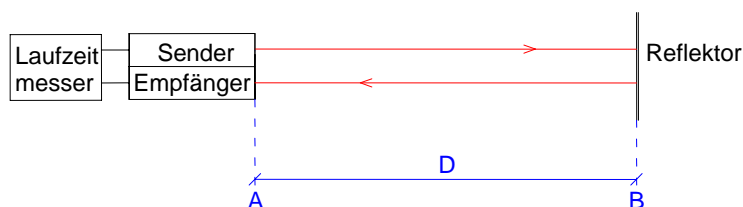
$$c = \frac{c_0}{n_L} = \frac{c_0}{n}$$

Berücksichtigung der aktuellen Ausbreitungsgeschwindigkeit im angewendeten Messverfahren.

## Prinzip / Verfahren der Entfernungsmessung mit elektromagnetischen Wellen

### 1) Laufzeitmessung (Impulsverfahren)

- Systemkomponenten:
- Sender
  - Reflektor
  - Empfänger
  - Laufzeitmesser



Der Sender sendet einen Impuls (Licht- / Mikrowellen) aus; ein Teil des ausgesendeten Impulses gelangt direkt zum Empfänger, der andere Teil läuft zwischen den Endpunkten der zu messenden Strecke hin und zurück. Der Laufzeitmesser bestimmt die Differenz der Laufzeiten beider Impulsteile, welche der Zeit  $t$  entspricht, die der externe Impuls für das Durchlaufen der Distanz  $D$  benötigt.

$$D = c \cdot \frac{t}{2} + k_0$$

t... Laufzeit

c... Impulsgeschwindigkeit  $c = \frac{c_0}{n}$

k<sub>0</sub>... Nullpunktskorrektur

Messung:  $\bar{D} = \bar{c} \cdot \frac{t}{2} + k_0$

$\bar{c} \dots \frac{c_0}{n}$

$\bar{n} \dots$  geräteinternem Brechungsindex

$$\rightarrow D = \frac{c_0}{\bar{n}} \cdot \frac{\bar{n}}{n} \cdot \frac{t}{2} + k_0$$

$$D = \bar{D} \cdot \frac{\bar{n}}{n}$$

Genauigkeitsschätzung für Zeitmessung:

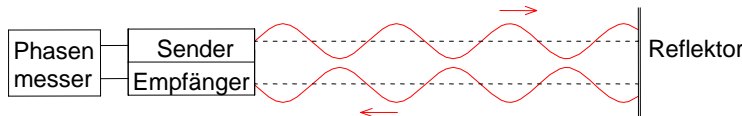
D auf 0,5 cm

⇒ t auf 0,03 ns

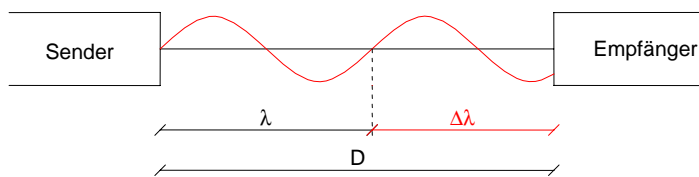
→ hohe Genauigkeitsanforderungen an die Zeitmessung

**2) Phasenmessung**

- Systemkomponenten:
- Sender
  - Reflektor
  - Empfänger
  - Phasenmesser



Der Sender erzeugt ein sinusförmiges Messsignal; zum Empfänger gelangt ein Teil des gesendeten Signal direkt, außer das dem über die Strecke gelaufene Signal. Das Streckensignal erfährt in Abhängigkeit von der Länge des zurückgelegten Weges eine Phasenverschiebung gegenüber dem Referenzsignal.



$$D = m \cdot \lambda + \Delta\lambda$$

m... ganze Zahl

Δλ ... Reststück der Welle (0 ≤ Δλ ≤ λ)

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

Phase:  $\varphi = m \cdot 2\pi + \Delta\varphi$

Δφ... eigentliche Messgröße  
Phasenmessung

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \cdot \lambda$$

$$D = m \cdot \frac{\lambda}{2} + \frac{\Delta\lambda}{2}$$

$$U = \frac{\lambda}{2} \dots \text{Unit}$$

$$D = m \cdot U + L$$

$$0 \leq L \leq \frac{\lambda}{2}$$

Die Anzahl  $m$  der ganzen Wellenlänge bleibt bei der Messung des Reststücks unbekannt; die Phasenmessung ist also nur im Bereich der halben Wellenlänge eindeutig. Die Genauigkeit der Phasenmessung liegt im Bereich  $\frac{\lambda}{1.000} - \frac{\lambda}{10.000}$ .

Um Eindeutigkeit für beliebige Strecken und ausreichende Messgenauigkeit zu erzielen, wird die Phasenmessung mit verschiedenen Wellenlängen bzw. Frequenzen durchgeführt.

Beispiel: Grobmaßstab:	$\lambda = 2000 \text{ m}$	$f = 150 \text{ kHz}$
Feinmaßstab:	$\lambda = 20 \text{ m}$	$f = 15 \text{ kHz}$
Messung:	922	Grobmessung
	<u>1,724</u>	Feinmessung
	921,724	

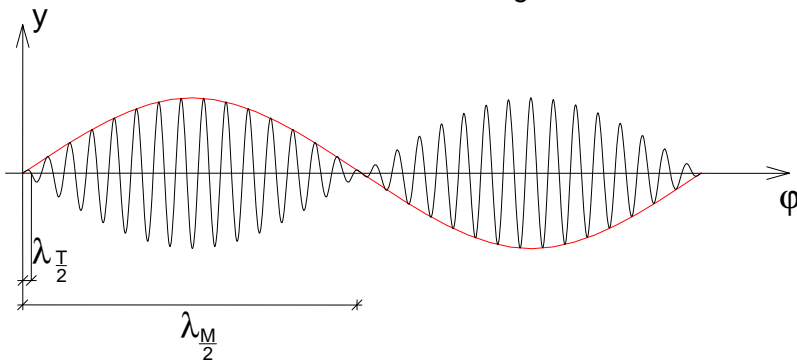
→ je kleiner Wellenlänge, desto stabiler Ausbreitung und genauer die Messung

Die Messwelle mit einem Maßstab im Meterbereich hat ungünstige Ausbreitungseigenschaften in der Atmosphäre (ihre tatsächliche Ausbreitungsgeschwindigkeit zum Messzeitpunkt ist nur sehr ungenau erfassbar). Man überlagert daher die Messwelle einer Trägerwelle mit hoher Frequenz (sichtbares Licht, Infrarot, Mikrowellen) durch Modulation.

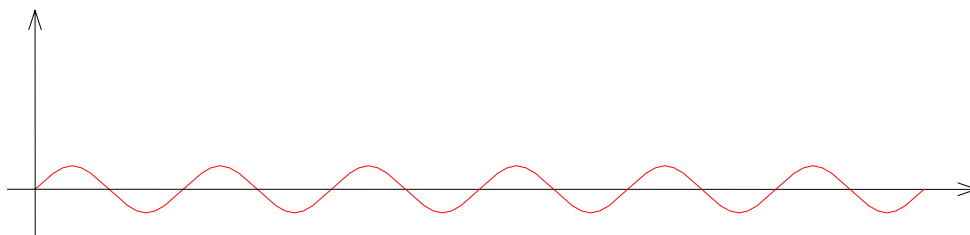
Modulation: → Frequenzmodulation  
→ Amplitudenmodulation

### **Amplitudenmodulation:**

$\lambda_T$ ... Trägerwelle → physikalische Eigenschaften  
Ausbreitungsgeschwindigkeit  
 $\lambda_M$ ... Messwelle → mathematische Beziehungen  
Phasenmessung



### **Frequenzmodulation:**



### Vergleich der verschiedenen Verfahren

Laufzeitmessung	Phasenmessung
+ Eindeutigkeit über beliebige Entfernung + berührungslose Messung möglich (Radar)	+ technisch einfacher (billiger)
Lichtwelle / Infrarot	Mikrowelle (Trägerwelle)
→ elektrooptische Distanzmesser Einstrahlverfahren + gute Bündelbarkeit (Laser) → passiver Reflektor (Prismenreflektor)	→ Mikrowellendistanzmesser Zweistrahilverfahren - schlechte Bündelbarkeit → aktiver Reflektor + Witterungsunabhängigkeit

### Leistungsmerkmale der elektrooptischen Distanzmessung

- Reichweite:
- Langstreckengeräte:  $D > 15 \text{ km}$  → Laser, Mikrowellen
  - Mittelstreckengeräte:  $5 \text{ km} < D < 15 \text{ km}$  → Laser, Infrarot
  - Kurzstreckengeräte:  $D < 5 \text{ km}$  → Infrarot (Laser)
  - Nahbereichsentfernungsmesser:  $D < 2 \text{ km}$
  - Spezialgeräte / Sondergeräte

→ Genauigkeit:

$$m_s = \pm(a + b \cdot s)$$

a in [mm]

b in [ $\text{mm}/\text{km}$ ] [ppm]

a,b...Parameter: streckenunabhängiger Fehler a  
streckenabhängiger Fehler b

Gerät	a [mm]	b [ppm]
Kurzstreckengeräte	3 - 5 mm	3 - 5 $\text{mm}/\text{km}$
Mittelstreckengeräte	1 - 10 mm	1 - 3 $\text{mm}/\text{km}$
Langstreckengeräte	5 - 10 mm	1 $\text{mm}/\text{km}$
Spezialgeräte	0,1 - 1 mm	0,1 - 0,3 $\text{mm}/\text{km}$ ???

### Aufbau des elektrooptischen Distanzmessung

- Komponenten:
- Lichtquelle →  $\lambda_T$
  - Modulator →  $\lambda_T + \lambda_M$
  - Oszillator →  $\lambda_M$
  - innerer Lichtweg
  - (- Reflektor)
  - Sende / Empfangsoptik
  - Photozelle (Umwandlung Licht in elektrische Spannung)
  - Verstärker
  - Phasenmessgerät

- Strahlungsquelle:
- Laser (Gaslaser HeNe)
  - Halbleiterlichtquellen (Halbleiterdiode Ga-As)  
→ Infrarotstrahlung

Der Oszillator hat die Aufgabe eine konstante Modulationswellenlänge zu erzeugen. Der Oszillator besteht aus einem Quarzkristall der in einem Kondensator eingebracht ist. Der innere Lichtweg wird zur Eichung des Phasenmessers gemessen.

Reflektor → Spiegel: Reflektionsprismen, Prismenreflektoren  
 Einfallender Lichtstrahl wird parallel zu sich reflektiert

Die Hauptforderung an die Sendeoptik ist eine große Lichtstärke (→ wenig Lichtintensität geht verloren) und eine gute Bündelung des Messsignals.

Über die Photozelle, die das Licht in elektrische Spannung umwandelt, kommt das Signal in den Phasemesser, der die Differenz zwischen dem Streckensignal und Referenzsignal (innerer Lichtweg) bestimmt. Die Phasemessung wird grundsätzlich ebenfalls als Zeitmessung im Bereich einer ganzen Messwellenlänge (Schwingungsperiode) durchgeführt.

## Auswertung von EDM-Strecken

→ **Instrumentenkorrekturen** (systematische Gerätefehler)

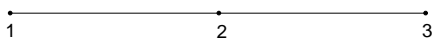
Eine Additionskorrektur (Nullpunktkorrektur) entsteht, wenn der Nullpunkt des EDM-Gerätes nicht in der Stehachse steht; außerdem kann auch die Reflexionsebene im Zielpunkt außerhalb der Stehachse liegen.



$$k_0 = k_s + k_z$$

Die Additionskorrektur ist jeweils für eine **Kombination** zwischen EDM-Gerät und Reflektor charakteristisch und gültig.

### 1. Bestimmung von $k_0$



$$(s_{12} + k_0) + (s_{23} + k_0) = (s_{13} + k_0)$$

■ gemessen

$$\Rightarrow k_0 = s_{13} - (s_{12} + s_{23})$$

### 2. Maßstabskorrektur $k_f$

notwendig bei Abweichungen der Modulationsfrequenz von ihrer Sollfrequenz.

$$k_f = \frac{\Delta f_M}{f_M} \cdot D_{\text{gem}}$$

$\Delta f_M$  ... Fehler der Modulationsfrequenz

$f_M$  ... Modulationsfrequenz SOLL

$$\lambda = \frac{c}{f_M}$$

Korrigierte Distanz (bzgl. systematischer Gerätefehler)

$$D = D_{\text{gem}} + k_0 + k_f$$

→ **Meteorologische Reduktion**

### 1. erste Geschwindigkeitskorrektur

$$D_1 = D \cdot \frac{n_0}{n}$$

$n$  ... aktueller Brechungsindex

$n_0$  ... "geräteinterner" Brechungsindex

$$n_0 = \frac{c_0}{f_M \cdot \lambda_M} \text{ bzw. } n_0 = n_0(p_0, t_0, c_0) \rightarrow \text{Eichtmosphäre}$$

2. Krümmungskorrektur

$$s_R = D_1 + \Delta D_k$$

→ unter 10 km  $D_1 = s_R \dots$  Raumsehne

$$\Delta D_k = -\frac{D_1^3}{24 \cdot R^2} \cdot (2k - k^2)$$

k... Refraktionskoeffizient

$$k = \frac{R}{r} \approx \frac{1}{8} = \frac{\text{Erdradius}}{\text{Radius der Lichtbahn}}$$

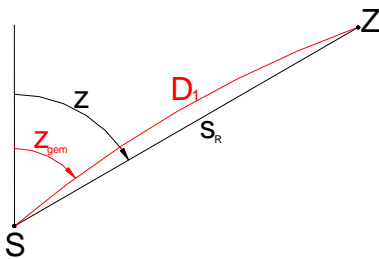
$$k = 5,03 \cdot \frac{P}{T^2} \cdot \left( 3,42 + \frac{dt}{dh} \right)$$

p... Luftdruck

T ... Temperatur

$\frac{dt}{dh}$  ... vertikale Temperaturgradient (°C / 100 m)

“BROOKS“



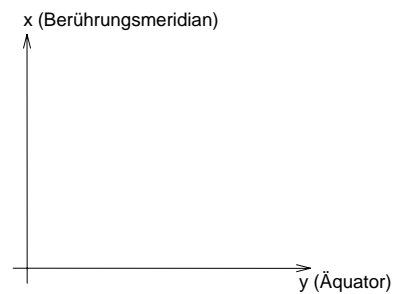
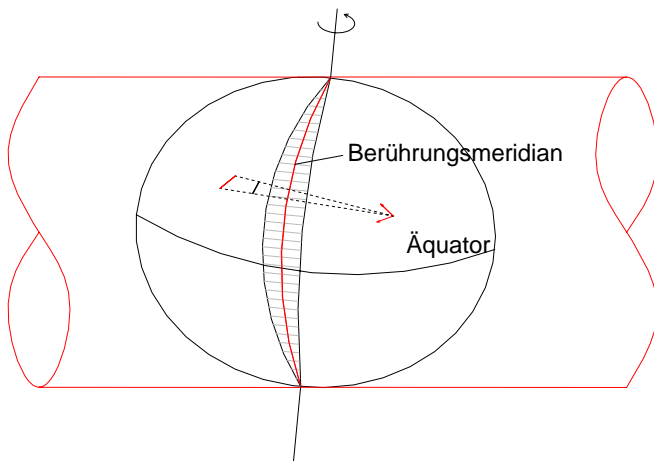
→ Geometrische Reduktion

Die bisherigen Reduktionsschritte ergeben die Länge der Raumsehne zwischen Stand und Zielpunkt. Für die Verwendung einer gemessenen Strecke in der ebenen Koordinatenrechnung ist diese Raumsehne in das jeweilige Koordinatensystem abzubilden.

→ Raumsehne

→ Gauß-Krüger-Abbildung  $\varphi, \lambda \rightarrow y, X$  (winkeltreu, konform)

$\varphi$ ... geografische Länge  
 $\lambda$ ... geografische Breite



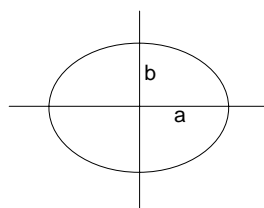
→ Ellipsoidische Größen / Beziehungen

Halbachsen: a... große Halbachse  
b... kleine Halbachse

Bessel Ellipsoid

$$a = 6.377.397,155 \text{ m}$$

$$b = 6.356.078,963 \text{ m}$$



*Internationale Ellipsoid (Hayford)*

a = 6.378.388,000 m  
 b = 6.356.911,946 m

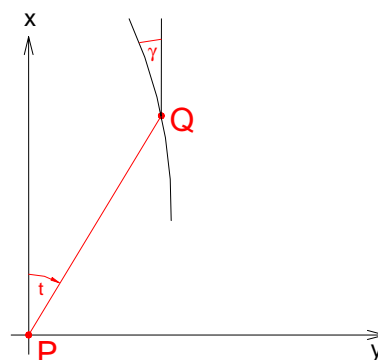
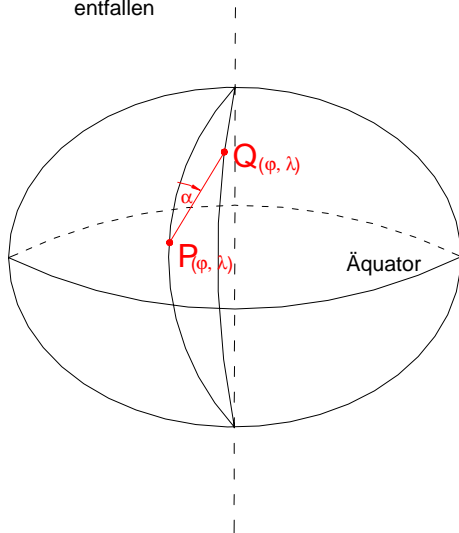
*WGS 84 (Geodätisches Weltsystem 1984)*

a = 6.378.137 m  
 f = 1/298,25 Abplattung

c... Polkrümmungsradius	$c = a^2 / b$
f... Abplattung	$f = (a - b) / a$
$e^2$ ... erste Exzentrizität	$e^2 = (a^2 - b^2) / a^2$
$e'^2$ ... zweite Exzentrizität	$e'^2 = (a^2 - b^2) / b^2$
V... Hilfsgröße	$V = \sqrt{1 + e'^2 \cdot \cos^2 \varphi}$
$\varphi$ ... geografische Breite	
N... Normalkrümmungsradius	$N = c / V$
M... Meridiankrümmungsradius	$M = c / V^3$
<b>R</b> ... Gauss'sche Krümmungsradius	$R = c / V^2 = \sqrt{M \cdot N}$
→ Schmiegunngskugel: geeignet um in bestimmten Bereich Ellipsoid durch Kugel zu ersetzen	
$R_\alpha$ ... Euler'sche Krümmungsradius	$R_\alpha = M \cdot N / (N \cdot \cos^2 \alpha + M \cdot \sin^2 \alpha)$
$\alpha$ ... Azimut	

Bei Kugel viel einfacher, da nur mehr Kreisradius, Pol- / Meridiankrümmungsradius u.a. entfallen

t vergleichbar mit  $\alpha$   
 Richtungswinkel = Azimut



*Näherungsformel:*

$$\varphi = \frac{x}{110}$$

x in km  
 $\varphi$  in Altgrad

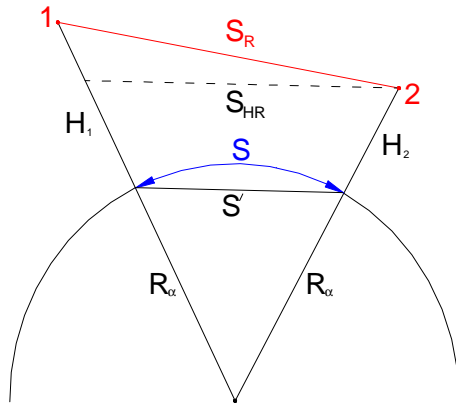
1° Diff = 110 km auf Breitengrade

$$\alpha = t + \gamma$$

$\gamma$ ... Meridiankongruenz

$$\hat{\gamma} = \frac{y}{R} \cdot \tan \varphi$$

→ **Höhenreduktion**



- $S_R$ ... Raumsehne (Ergebnis der met. Reduktion)
- $S$ ... Bogenlänge auf Hilfskugel ( $R_\alpha$ )
- $S'$ ... Sehne auf Hilfskugel
- $H_1, H_2$ ... Höhe Standpunkt / Zielpunkt
- $R_\alpha$ ... Euler'sche Krümmungsradius im Azimut der Strecke

$$S' = \sqrt{\frac{S_R^2 - \Delta H^2}{\left(1 + \frac{H_1}{R_\alpha}\right) \cdot \left(1 + \frac{H_2}{R_\alpha}\right)}}$$

$$S = S' + \frac{S'^3}{24 \cdot R_\alpha^2} \quad (\text{ab } \approx 10 \text{ km notwendig})$$

→ **Verebnung** (Abb. Ellipsoid → Rechenebene)

$$S_{y,x} = S + \frac{S}{6 \cdot R^2} \cdot (y_1^2 + y_1 \cdot y_2 + y_2^2)$$

$$\frac{S_{HR}}{S'} = \frac{R_\alpha + H_2}{R_\alpha} \quad \rightarrow \text{um Sehne auf bestimmtes Niveau (z.B. Projekt) zu reduzieren.}$$

### Vereinfachung für kurze Strecken

→ Höhenreduktion

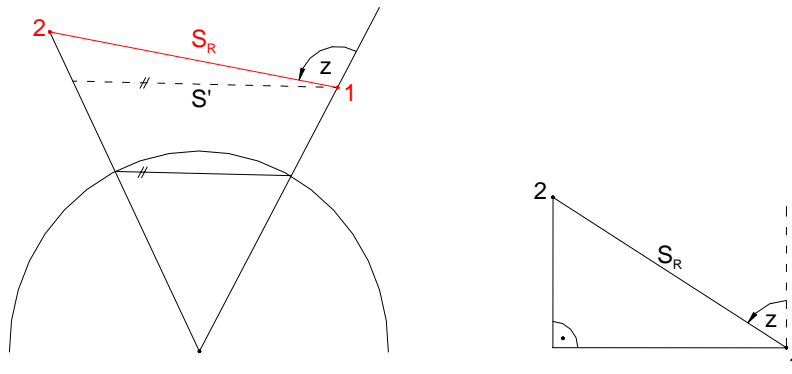
$$S = \sqrt{S_R^2 - \Delta H^2} \cdot \left(1 - \frac{H_M}{R_\alpha}\right)$$

$H_M$ ... mittlere Höhe der Strecke

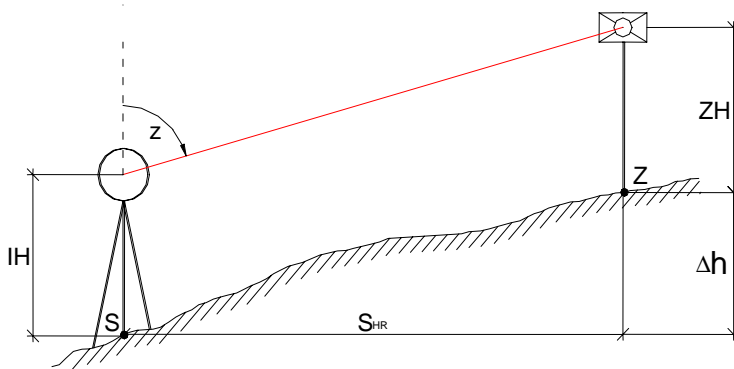
mit Zenitdistanzen:

$$S' = S_R \cdot \sin z \left[ -\frac{S_R^2}{2R} \cdot (2-k) \cdot \cos z \right]$$

Erdkrümmung; Refraktion



$S' = S_R \cdot \sin z$  bei  $\Delta h_{12} = S_R \cdot \cos z$   
 → in der Praxis bei kurzen Strecken



$S_{HR} = S_R \cdot \sin z$   
 $\Delta h = S_R \cdot \cos z + IH - ZH$

IH... Instrumentenhöhe  
 ZH... Zielhöhe

$S_{y,x} = S \cdot \left( 1 + \frac{y_M^2}{2R^2} \right)$

S → über Strahlensatz  
 y<sub>M</sub> → Mittel

Raumsehen aus ebener Strecke (< 2 km → Absteckung)

$s = S_{y,x} \cdot \frac{1 - y_M^2}{2R^2}$

$S_R = \sqrt{S^2 \cdot \left( 1 + \frac{H_M}{R_\alpha} \right)^2 + \Delta H^2}$

**Genauigkeitsüberlegung EDM**

Die Genauigkeit von EDM-Strecken hängt von der eigentlichen Messgenauigkeit und der Genauigkeiten der Korrekturen und Reduktionen ab. Als Genauigkeitsmaß wird der mittlere Fehler verwendet.

→ *eigentliche Streckenmessung: Laufzeitmessung*

$D_A = c \cdot \frac{t}{2}$

Zeitmessung: t, m<sub>t</sub>

$$\Rightarrow m_{D_A} = ? = \pm \frac{c}{2} \cdot m_t \quad \rightarrow \text{Auswirkung streckenunabhängig}$$

$$\text{rel. Fehler: } \frac{m_{D_A}}{D_A} \quad \rightarrow \text{günstig auf lange Strecken}$$

→ *Phasenmessung*

$$D_A = m \cdot U + L = m \cdot U + \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \cdot U$$

Zeitmessung:  $\Delta\varphi$ ,  $m_{\Delta\varphi}$

$$\Rightarrow m_{D_A} = ? = \pm \frac{U}{2\pi} \cdot m_{\Delta\varphi} \quad \rightarrow \text{Auswirkung streckenunabhängig, je kleiner U desto besser}$$

→ *Instrumentenkorrekturen*

$$\left. \begin{array}{l} \rightarrow k_0 \\ \rightarrow k_f \end{array} \right\} D = D_A + \underset{m_{k_0}}{\downarrow} k_0 + \underset{m_{k_f}}{\downarrow} k_f$$

$$\Rightarrow m_D = \pm \sqrt{m_{k_0}^2 + m_{k_f}^2}$$

$$k_f = \frac{\Delta f_M}{f_M} \cdot D_A$$

$$\Rightarrow m_{k_f} = \frac{D_A}{f_M} \cdot m_{f_M}$$

OBERSCHULE FÜR GEOMETER „PETER ANICH“, BOZEN

- Fachrichtung Baubetrieb -

## **Skripte aus 5 Jahren Oberschule**

**Diese Arbeit soll als didaktische Unterlage für den Schulunterricht oder als Nachschlagewerk dienen.**

*Diese Arbeit erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Ich weise jegliche Verantwortung in Bezug auf Inhaltsfehler und Fehlen von Textteilen von mir. Ich bitte aber darum, mir alle Fehler mitzuteilen, damit ich die Unterlagen verbessern und erweitern kann.*

***Die Vervielfältigung ist mit Quellenangabe erlaubt. Die Dokumente dürfen ohne Erlaubnis meinerseits nicht verändert werden.***

Moroder Daniel  
Tinderlaweg 13A  
39046 St. Ulrich  
[daniel@moroder.de](mailto:daniel@moroder.de)

St. Ulrich, September 2001