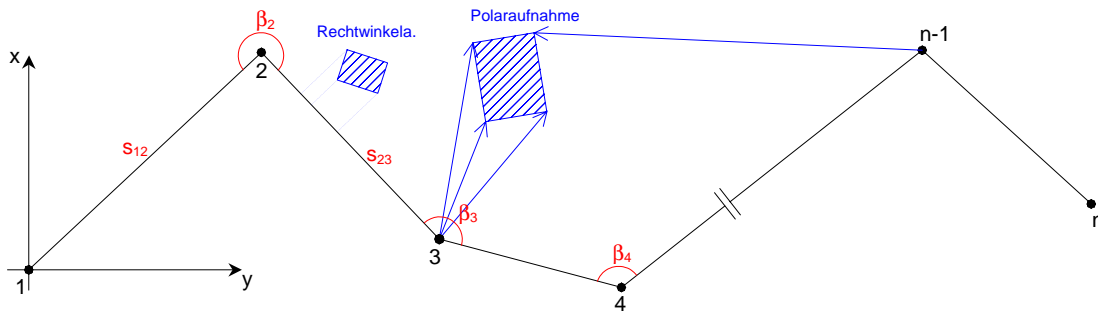


POLYGONIERUNG

polygonometrische Punktbestimmung; Polygonzug

Verfahren der Lagepunktbestimmung aus Richtungs- und Steckenmessungen



gegenseitige Festlegung einer Anzahl von (Neu)punkten durch einen Linienzug (Polygonzug).

Messung: Winkel auf den Eckpunkten (Brechungswinkel)
Strecken zwischen benachbarten Punkten

Koordinatensystem (Lagerung): - frei wählbar
- vorgegeben; Anschluss an bestehendes Koordinatensystem

Anwendung:

- Aufbau bzw. Verdichtung von Lagefestpunktfeldern
- Bestimmung bzw. Schaffung von Festpunkten (Vermessungspunkten) für folgende Detailmessungen (Aufnahmen und Absteckung)
- Verbindung zweier gegenseitig nicht sichtbaren Punkte (Absteckungsarbeiten im Tunnelbau u.a.)

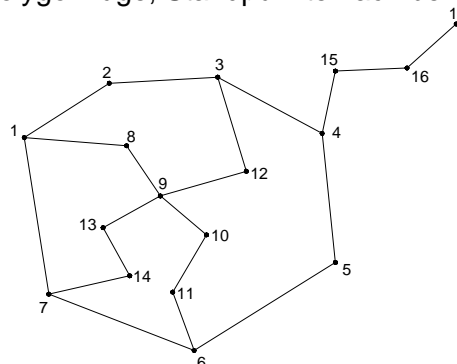
Formen / Anlegung des Polygonzuges

→ **Polygonzug:** gebrochener Linienzug in verschiedenen Anordnungen

- *angeschlossene Polygonzug*
beginnt und endet auf bereits bekannten Festpunkten (Koordinatensystem vorgegeben) → beidseitig angeschlossen
- *fliegender Polygonzug*
nur einseitig angeschlossener Polygonzug
- *freier Polygonzug*
keinerlei Anschlüsse (Koordinatensystem ist frei zu definieren)

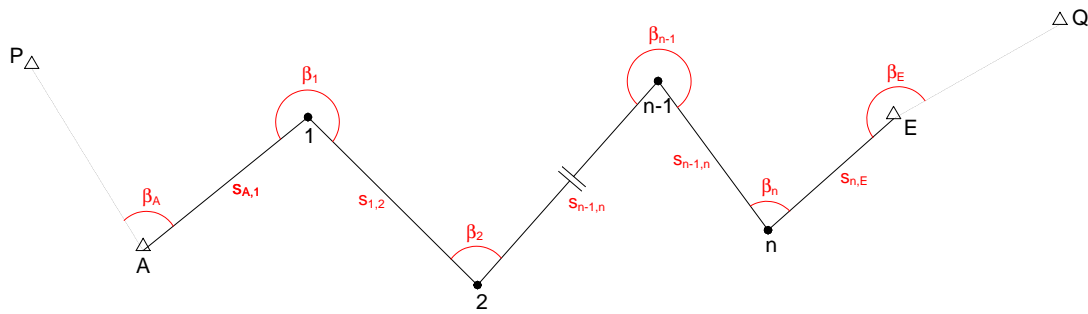
→ **Ringpolygon:** ein geschlossenes Polygon indem die letzte Seite an die Erste anschließt

→ **Polygonnetz:** Verflechtung mehrerer Polygonzuge, Standpunkte nach belieben



Berechnung des Polygonzuges

→ beidseitig richtungs- und lagemäßig angeschlossener Polygonzug (Normalfall)



- geg: A, E (y, x)...Anfangs- / Endpunkt
- P, Q (y, x)...Richtungsanschluss / -abschluss
- gem: Brechungswinkel $\beta_A, \beta_1, \dots, \beta_n, \beta_E$
- Seiten $s_{A,1}, s_{1,2}, \dots, s_{n-1,n}, s_{n,E}$
- ges: 1, 2, ... n (y, x)

Übung:

geg:

Punkt	y [m]	x [m]	
A	91.938,36	222.574,73	Anfangspunkt
E	92.017,84	222.666,79	Endpunkt
P	93.120,17	222.915,64	Anschlussrichtung
Q	94.048,96	223.302,43	Abschlussrichtung

gem:

von	nach	Richtung [°]	Strecke [m]
A	1	48,944	47,43
A	P	0,000	/
1	2	149,124	82,28
1	A	35,422	47,45
2	E	87,681	53,90
2	1	351,001	82,28
E	Q	39,533	/
E	2	137,411	53,94

Rechengang

1) Aufbereitung der Messungen

$$\beta_i = R_{i+1} - R_{i-1}$$

2) Berechnung der Richtungswinkel

→ über Koordinaten → 2. HA

$$t_{A1} = t_{PA} \pm 200^g + \beta_A = 131,065^g$$

$$t_{12} = t_{A1} \pm 200^g + \beta_1 = 44,767^g$$

$$t_{2E} = t_{12} \pm 200^g + \beta_2 = 381,447^g$$

$$t_{EQ} = t_{2E} \pm 200^g + \beta_E = 83,569^g$$

3) Winkelprobe / Winkelwiderspruch

$$f_\beta = (t_{EQ} - t_{PA}) - \sum_{i=1}^n \beta_i \pm k \cdot 200^g$$

l...A, 1, 2,..., n, E
 k...natürliche Zahl
 soll = 0

$$\text{ist} = 0,016^g$$

Für den Winkelwiderspruch f_β sind fehlertheoretische Überlegungen anzustellen bezüglich seine zulässige Größe.

$$m_R = \pm 0,002^g \quad \rightarrow \text{Annahme!}$$

$$m_\beta = m_R \cdot \sqrt{2}$$

$$m_{\sum\beta} = m_\beta \cdot \sqrt{l}$$

$$m_{\sum\beta} = \pm 0,002^g \cdot \sqrt{8} = \pm 0,006^g$$

amtliche Fehlergrenzen:

$$\rightarrow \text{zulässiger Winkelwiderspruch: } f_\beta = a \cdot \sqrt{l} + b$$

a, b...amtliche Parameter

Wenn das Zustandekommen des Winkelwiderspruchs ausschließlich den zufälligen Fehlern der Messungen zugeschrieben werden kann, so ist eine gleichmäßige Verteilung des Winkelwiderspruchs auf alle Messungen (alle Richtungen) vertretbar.

\rightarrow Verbesserung der Brechungswinkel

$$\beta' = \beta + \frac{f_\beta}{n+2}$$

$$\text{Kontrolle } f_\beta \stackrel{!}{=} 0$$

\rightarrow Berechnung der verbesserten Richtungswinkel

4) Berechnung der Koordinaten(differenzen)

$$y_1 = y_A + s_{A1} \cdot \sin t_{A1}$$

$$x_1 = x_A + s_{A1} \cdot \cos t_{A1}$$

$$y_2 = y_1 + s_{12} \cdot \sin t_{12}$$

$$x_2 = x_1 + s_{12} \cdot \cos t_{12}$$

⋮

⋮

$$y_E = y_n + s_{nE} \cdot \sin t_{nE}$$

$$x_E = x_n + s_{nE} \cdot \cos t_{nE}$$

$$y_E = y_A + \underbrace{[s \cdot \sin t]}_{[\Delta y]}$$

$$x_E = x_A + \underbrace{[s \cdot \cos t]}_{[\Delta x]}$$

$$y_E - y_A - [\Delta y] \stackrel{!}{=} 0$$

$$x_E - x_A - [\Delta x] \stackrel{!}{=} 0$$

$$y_E - y_A - [\Delta y] = f_y \rightarrow \text{tatsächlich}$$

$$x_E - x_A - [\Delta x] = f_x \rightarrow \text{tatsächlich}$$

$$f_y = -0,154211231$$

$$f_x = -0,099983734$$

f_y, f_x ...Koordinatenwidersprüche

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_x^2} \dots \text{linearer Abschlussfehler}$$

$$f = 0,1837875154$$

Das Zustandekommen der Koordinatenwidersprüche bzw. des linearen Abschlussfehlers wird zum grossteil in Fehlern der Streckenmessung begründet sein. Es ist also wieder zu beurteilen ob die Streckenmessung frei von systematischen Fehlern und groben Fehlern

ist (evtl. amtliche Fehlergrenzen). Die Erfüllung der Koordinatenabschlussbedingungen wird erreicht, indem die Koordinatenwidersprüche proportional den Seitenlängen des Polygonzuges aufgeteilt werden (dies ist in Übereinstimmung mit dem Fehlergesetz der Streckenmessung).

→ Aufteilung der Koordinatenwidersprüche auf die Koordinatendifferenzen proportional zu den Seitenlängen.

$$\Delta y'_{i,i+1} = \Delta y_{i,i+1} + k_y \cdot s_{i,i+1}$$

$$k_y = \frac{f_y}{[s]}$$

$$\Delta x'_{i,i+1} = \Delta x_{i,i+1} + k_x \cdot s_{i,i+1}$$

$$k_x = \frac{f_x}{[s]}$$

Kontrolle: $f_x, f_y = 0$

5) Berechnung der (endgültigen) Koordinaten

Punkt	y	x
A	91.938,36	222.574,73
1	91.980,22	222.552,46
2	92.033,37	222.615,17
E	92.017,84	222.666,79

Berechnungstabelle

Punkt	Brechungswinkel β		Richtungswinkel t		Seite s	Koordinatendifferenzen		ausgebesserte Koordinatendifferenzen		Koordinaten	
	β	β'	t	t'		Δy	Δx	$\Delta y'$	$\Delta x'$	y	x
P			282,121							93.120,17	222.915,64
A	48,944	48,948	131,065	131,069	47,44	41,90175694	-22,24401864	41,86191932	-22,26984759	91.938,36	222.574,73
1	113,702	113,706	44,767	44,775	82,28	53,21512492	62,75467217	53,1460305	62,7098744	91.980,222	222.552,460
2	136,680	136,684	381,447	381,459	53,92	-15,48267063	51,6493302	-15,52794982	51,61997318	92.033,368	222.615,170
E	302,122	302,126	83,569							92.017,84	222.666,79
Q										94.048,96	223.202,43

$$f_y = -0,15421123$$

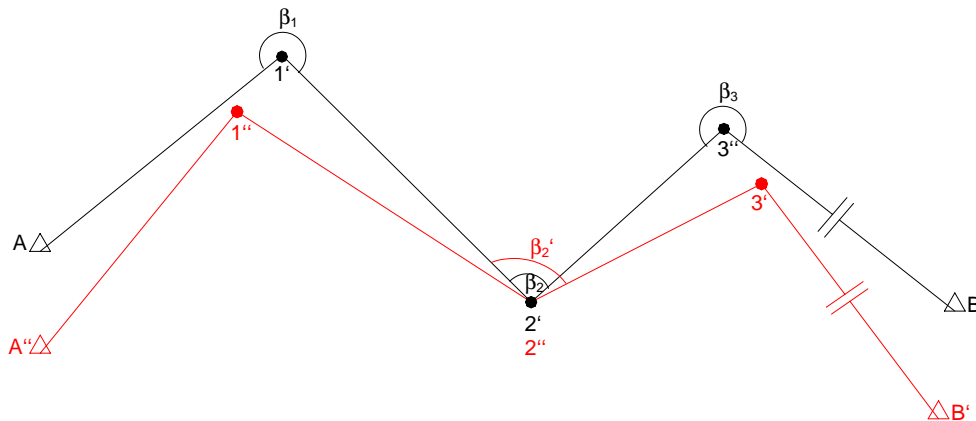
$$f_x = -0,09998373$$

$$k_y = -8,39747495121324 \cdot 10^{04}$$

$$k_x = -5,44455075159669 \cdot 10^{04}$$

Aufsuchen grober Fehler im Polygonzug

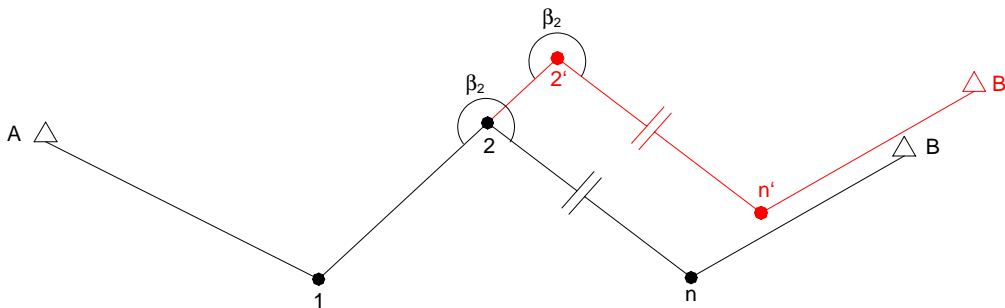
→ Fehler in der Richtungsmessung: f_β



- 1) Durchrechnen des Polygonzuges von A nach B
A, 1', 2', 3', ... B'
- 2) Durchrechnen des Polygonzuges von B nach A
A'', 1'', 2'', 3'', ... B

$2' \approx 2'' \Rightarrow$ grob fehlerhaft

→ grober Fehler in der Streckenmessung f_y, f_x



f_y, f_x, f

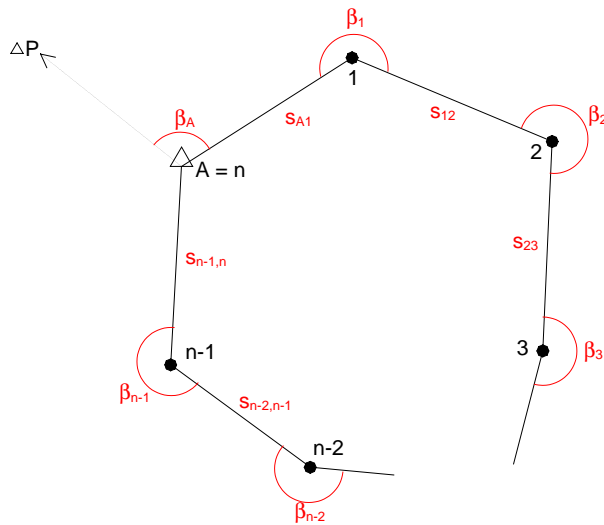
$t_{BB'} \approx t_{22'}$

$S_{BB'} \approx S_{22'}$

Der grobe Streckenfehler bewirkt eine parallele Verschiebung des restlichen Zugteils, der Richtungswinkel vom berechneten Anschlusspunkt des Polygonzuges zum gegebenen (B) entspricht annähernd dem Richtungswinkel der Polygonseite in der der grobe Streckenfehler vorliegt.

Geschlossener Polygonzug: Ringpolygon

Der geschlossene Polygonzug führt wieder zu seinem Ausgangspunkt zurück.



n-Eck: Unbekannte $(n-1) \cdot 2 = 2n-2$

Messungen, Seiten n

Brechwinkel $\frac{n+1}{2n+1}$

\Rightarrow 3 unabhängige Messungen

\Rightarrow 3 Bedingungen (Kontrollen)

Auswertung / Berechnung

1) Winkelwiderspruch: f_β

Summe der Innenwinkel im n-Eck: $(n-2) \cdot 200^\circ$

Summe der Außenwinkel im n-Eck: $(n+2) \cdot 200^\circ$

$$(n-2) \cdot 200^\circ - [\beta] = f_\beta \dots \text{Innenwinkel}$$

$$(n+2) \cdot 200^\circ - [\beta] = f_\beta \dots \text{Außenwinkel}$$

f_β zulässig?
 ja \rightarrow 2)
 nein \rightarrow Suche grober Fehler in Richtungsmessung

2) gleichmäßige Aufteilung von f_β auf alle Brechungswinkel

\rightarrow Kontrolle $f_\beta \stackrel{!}{=} 0$

3) Berechnung der Koordinatendifferenzen

$$\Delta y = s \cdot \sin t$$

$$\Delta x = s \cdot \cos t$$

$$[\Delta y] = [s \cdot \sin t] \stackrel{!}{=} 0 = f_y$$

$$[\Delta x] = [s \cdot \cos t] \stackrel{!}{=} 0 = f_x$$

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_x^2}$$

f zulässig? $\begin{cases} \text{ja} \rightarrow 4) \\ \text{nein} \rightarrow \text{Suche grober Fehler in Streckenmessung} \end{cases}$

4) Aufteilung von f_y , f_x proportional zu Seitenlängen

\rightarrow Kontrolle $f_y = f_x = 0$

5) Berechnung der Endgültigen Koordinaten von 1 bis n

Anmerkung:

Beim geschlossenen Polygonzug kann die Längenmessung in der Auswertung nur unvollständig kontrolliert werden. Da eine Längenkontrolle fehlt (Anfangspunkt = Endpunkt) würden regelmäßige Fehler in der Streckenmessung nur die Größe des Polygons proportional zu den Seitenlängen verändern, was im rechnerischen Abschluss des Zuges jedoch nicht wirksam wird.

Übung

geg: *Brechungswinkel*

$$\beta_1 = 256,1980^\circ$$

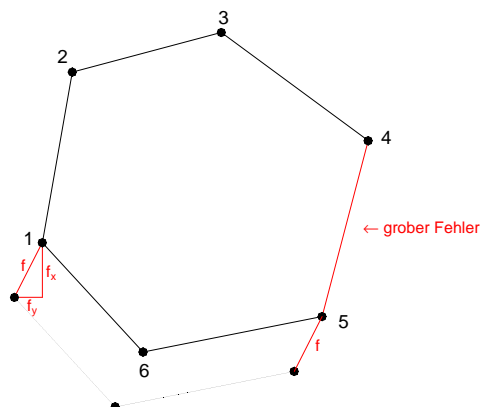
$$\beta_2 = 268,0269^\circ$$

$$\beta_3 = 261,9111^\circ$$

$$\beta_4 = 278,1518^\circ$$

$$\beta_5 = 260,1032^\circ$$

$$\beta_6 = 275,6066^\circ$$



Strecken

$$s_{12} = 294,13 \text{ m}$$

$$s_{23} = 255,25 \text{ m}$$

$$s_{34} = 271,84 \text{ m}$$

$$s_{45} = \del{380,14 \text{ m}} \quad 308,14 \text{ m}$$

$$s_{56} = 282,51 \text{ m}$$

$$s_{67} = 232,03 \text{ m}$$

Festlegung (Def.) des Koordinatensystems

1 (500/500) $t_{12} = 0,000^\circ$ (x-Achse)

Lage Orientierung

ges: 2 - 6 (y, x)

1) *Winkelwiderspruch: f_β*

$$f_\beta = (n + 2) \cdot 200^\circ - [\beta] = 0,0024^\circ$$

2) *gleichmäßige Aufteilung von f_β auf alle Brechungswinkel*

$$\beta' = \beta + \frac{f_\beta}{6} = \beta + 0,0004$$

→ Kontrolle $[\beta'] = 0$

Berechnung der Richtungswinkel

$$t_{23} = t_{12} \pm 200^g + \beta_2$$

$$t_{34} = t_{23} \pm 200^g + \beta_3$$

$$t_{45} = t_{34} \pm 200^g + \beta_4$$

$$t_{56} = t_{45} \pm 200^g + \beta_5$$

$$t_{61} = t_{56} \pm 200^g + \beta_6$$

3) *Berechnung der Koordinatendifferenzen*

$$\left. \begin{aligned} -[\Delta y] &= -[s \cdot \sin t] = +9,346008058 \\ -[\Delta x] &= -[s \cdot \cos t] = +71,25141656 \end{aligned} \right\} \text{grober Fehler}$$

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_x^2} = 71,86175776$$

zu erwarten: dm-Fehler

vorhanden: 71,86 m

→ **grober Fehler in Streckenmessung**

$$t_f = 208,29^g \quad \rightarrow \text{über 2. HA} \rightarrow f_y, f_x$$

→ $t_f \approx t_{45}$!! grober Fehler

Begründung des Fehlers

$$s_{45} = 380,14 \text{ m} \rightarrow 308,14 \text{ m}$$

Annahme Zahlensturz → Fehler von 72 m interpretierbar

neue Berechnung der Koordinatendifferenzen

$$f_y = +0,219917464 \approx +0,220$$

$$f_x = -0,1678698433 \approx -0,168$$

$$f = 0,2766658183 \approx 0,277$$

4) *Aufteilung von f_y, f_x proportional zu Seitenlängen*

$$\Delta y'_{i,i+1} = \Delta y_{i,i+1} + k_y \cdot s_{i,i+1}$$

$$\Delta x'_{i,i+1} = \Delta x_{i,i+1} + k_x \cdot s_{i,i+1}$$

$$k_y = \frac{f_y}{[s]} = 1,337778839 \cdot 10^4$$

$$k_x = \frac{f_x}{[s]} = -1,021168216 \cdot 10^4$$

Berechnungstabelle

Punkt	Brechungswinkel β		Richtungswinkel t	Seite s	Koordinatendifferenzen		ausgebesserte Koordinatendifferenzen		Koordinaten	
	β	β'			Δy	Δx	$\Delta y'$	$\Delta x'$	y	x
1	256,1980	256,1984							500,00	500,00
			0,000	294,13	0,000	294,13	0,04	294,10		
2	268,0269	268,0273							500,04	794,10
			68,0273	255,25	223,73	122,87	223,76	122,85		
3	261,9111	261,9115							723,80	916,95
			129,9388	271,84	242,33	-123,18	242,37	-123,21		
4	278,1518	278,1522		308,14	-39,05	-305,65			966,17	793,74
			208,0910	380,14	-48,18	-377,07	-39,02	-305,69		
5	260,1032	260,1036							927,15	488,05
			268,1946	282,51	-247,98	-135,34	-247,94	-135,37		
6	275,6066	275,6070							679,21	352,68
			343,8016	232,03	-179,24	147,34	-179,21	147,32		
1									500,00	500,00

Übung:

geg:

Punkt	y [m]	x [m]
A	179,200	352,690
B	466,170	793,750

$$t_{PA} = 143,8016^g$$

$$t_{BQ} = 329,9388^g$$

gem:

$$\beta_A = 71,1530^g \quad s_{A1} = 148,120 \text{ m}$$

$$\beta_1 = 218,0123^g \quad s_{12} = 135,250 \text{ m}$$

$$\beta_2 = 211,5327^g \quad s_{23} = 121,170 \text{ m}$$

$$\beta_3 = 212,3319^g \quad s_{3B} = 138,280 \text{ m}$$

$$\beta_B = 73,1133^g$$

$$f_\beta = (t_{BQ} - t_{PA}) - \sum_{i=1}^3 \beta_i \pm k \cdot 200^g = -0,006^g$$

$$f_y = y_B - y_A - [\Delta y] = -0,08930600793$$

$$f_x = x_B - x_A - [\Delta x] = -0,01324734672$$

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_x^2} = 0,0132483683$$

$$\Delta y'_{i,i+1} = \Delta y_{i,i+1} + k_y \cdot s_{i,i+1}$$

$$k_y = \frac{f_y}{[s]} = 0,0001864522324$$

$$\Delta x'_{i,i+1} = \Delta x_{i,i+1} + k_x \cdot s_{i,i+1}$$

$$k_x = \frac{f_x}{[s]} = 0,00002440467691$$

Punkt	y [m]	x [m]
A	179,200	352,690
1	213,646	496,729
2	280,569	614,246
3	358,511	707,001
B	466,170	793,750

Berechnungstabelle

Punkt	Brechungswinkel β		Richtungswinkel t		Seite s	Koordinatendifferenzen		ausgebesserte Koordinatendifferenzen		Koordinaten	
	β	β'	t	t'		Δy	Δx	$\Delta y'$	$\Delta x'$	y	x
P											
			143,8016								
A	71,153	71,1518		14,9534						179,200	352,690
			14,9546		148,12	34,47016391	144,0429794	34,44579486	144,0393645		
1	218,0123	218,0111		32,9645						213,646	496,729
			32,9669		135,25	66,94526296	117,5197615	66,92301081	117,5164608		
2	211,5327	211,5315		44,4960						280,569	614,246
			44,4996		121,17	77,9617191	92,75849969	77,94178393	92,75554253		
3	212,3319	212,3307		56,8267						358,511	707,001
			56,8315		138,28	107,6821605	86,75200689	107,6594104	86,74863221		
B	73,1133	73,1121								466,170	793,750
			329,9388	soll							
Q			329,9448	ist							
			-0,006	Differenz		-0,08930600793	-0,01324734672	0	0		
						f_y	f_x	f_y	f_x		
						-1,64522324E-04	-2,44046791E-05				
						k_y	k_x				

$$f_\beta = (t_{BQ} - t_{PA}) - \sum_{i=1}^3 \beta_i \pm k \cdot 200^g = -0,006^g$$

$$f_y = y_B - y_A - [\Delta y] = -0,08930600793$$

$$f_x = x_B - x_A - [\Delta x] = -0,01324734672$$

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_x^2} = 0,0132483683$$

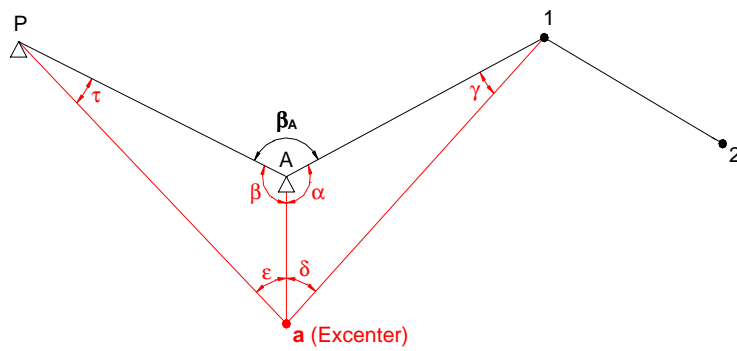
$$\Delta y'_{i,i+1} = \Delta y_{i,i+1} + k_y \cdot s_{i,i+1}$$

$$k_y = \frac{f_y}{[s]} = 0,0001864522324$$

$$\Delta x'_{i,i+1} = \Delta x_{i,i+1} + k_x \cdot s_{i,i+1}$$

$$k_x = \frac{f_x}{[s]} = 0,00002440467691$$

Indirekter Anschluss



$$s_{A1} = s_{a1} \cdot \frac{\sin \delta}{\sin(\gamma + \delta)}$$

$$\alpha = 200 - (\gamma + \delta)$$

$$\sin \alpha = \sin(\gamma + \delta)$$

$$\beta_A = 400 - \alpha - \beta$$

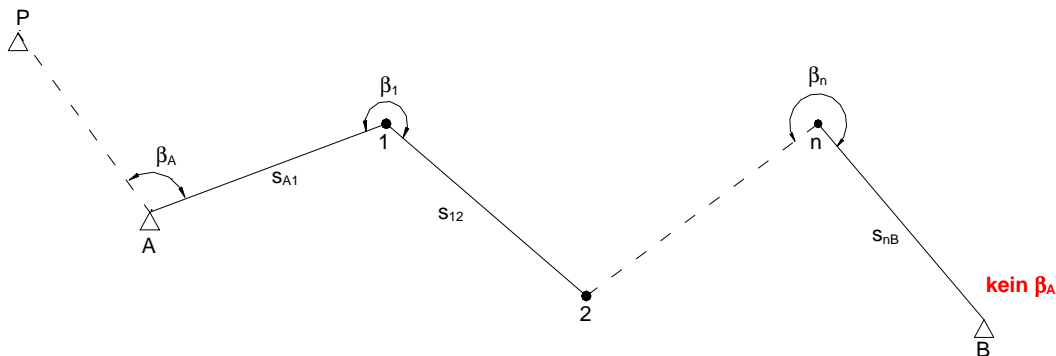
\overline{AP} aus Koordinaten

\overline{Aa} aus Sinussatz

$\Rightarrow \beta$ aus Sinussatz

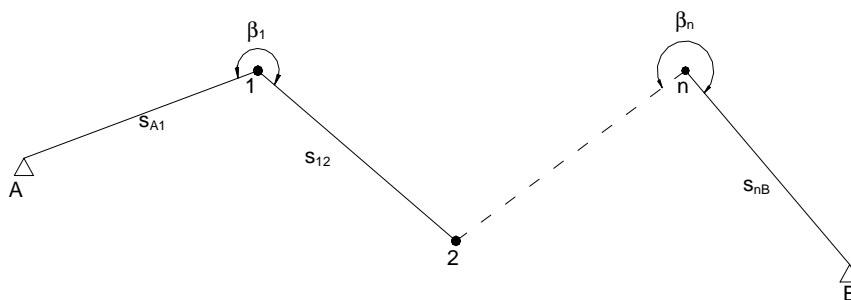
Andere Polygonzugformen

\rightarrow richtungsmäßig nicht an- oder abgeschlossener Polygonzug



Der Zug ist orientiert aber nur längenmäßig kontrolliert.

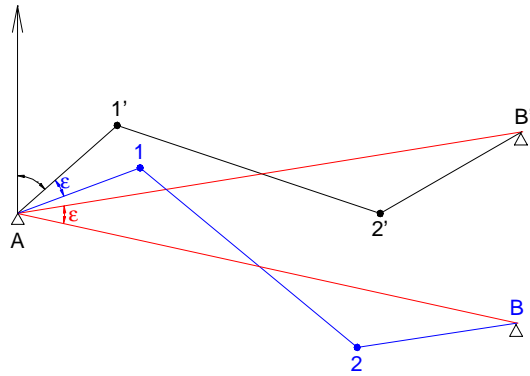
\rightarrow richtungsmäßig nicht an- und nicht abgeschlossener Polygonzug



Berechnung zunächst im lokalen Koordinatensystem ($\rightarrow B'$)

Berechnung: $s_{AB}, s_{AB'}$ \rightarrow Längenkontrolle (siehe f...linearer Abschlussfehler)

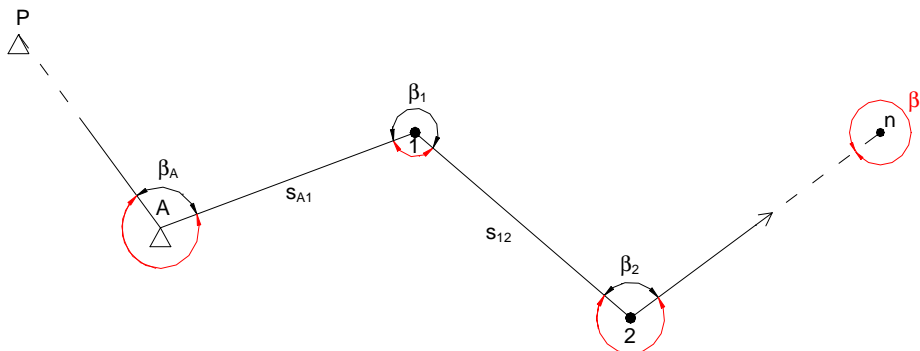
$t_{AB}, t_{AB'}$ $\rightarrow t_{AB} - t_{AB'} = \epsilon$...Korrektur der Richtungswinkel



Anzahl Unbekannte: $2n$
 Anzahl Messungen: Strecken $\rightarrow n + 1$
 Brechungswinkel $\rightarrow \frac{n}{2n + 1}$

1 überschüssige Messung \Rightarrow 1 Bedingung (Längenkontrolle)

\rightarrow fliegender Polygonzug (nur einseitig richtungs- und längenmäßig angeschlossen)



Anzahl Unbekannte: $2n$
 Anzahl Messungen: Strecken $\rightarrow n$
 Brechungswinkel $\rightarrow \frac{n}{2n}$

Der fliegende Polygonzug ist eindeutig bestimmt; es fehlen überschüssige Beobachtungen und es ergeben sich deshalb keine Kontrollen die zur Überprüfung der Richtigkeit der Messungen dienen könnten.

Kontrollmöglichkeiten für den fliegenden Polygonzug:

Polygonzug wird in sich selber zurückgeführt, d.h. in der Gegenrichtung ein zweites Mal gemessen und an die Punkte A und P lage- und richtungsmäßig abgeschlossen.

\rightarrow freier Polygonzug

lokales, selbstdefiniertes Koordinatensystem

OBERSCHULE FÜR GEOMETER „PETER ANICH“, BOZEN

- Fachrichtung Baubetrieb -

Skripte aus 5 Jahren Oberschule

Diese Arbeit soll als didaktische Unterlage für den Schulunterricht oder als Nachschlagewerk dienen.

Diese Arbeit erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Ich weise jegliche Verantwortung in Bezug auf Inhaltsfehler und Fehlen von Textteilen von mir. Ich bitte aber darum, mir alle Fehler mitzuteilen, damit ich die Unterlagen verbessern und erweitern kann.

Die Vervielfältigung ist mit Quellenangabe erlaubt. Die Dokumente dürfen ohne Erlaubnis meinerseits nicht verändert werden.

Moroder Daniel
Tinderlaweg 13A
39046 St. Ulrich
daniel@moroder.de

St. Ulrich, September 2001