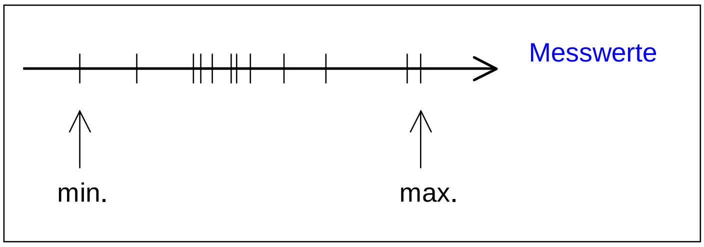
FEHLERLEHRE: GRUNDLEHREN

→ Aufgabe der Fehlerlehre

<u>Beispiel</u>: der Abstand zweier Punkte wird mehrfach vermessen; von verschiedenen Personen, zu verschiedenen Zeiten, mit Verschiedenen Instrumenten,…
Die Messwerte dieser Beobachtungsreihe lauten nicht immer gleich, Sie streuen innerhalb der Spanne zwischen niedrigsten und höhsten Wert.



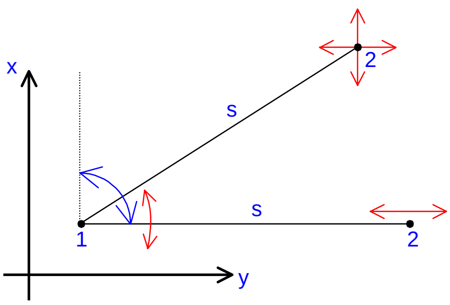
Zu dieser Beobachtungsreihe ergeben sich verschiedene Fragen:

Wie groß ist der Abstand zwischen den 2 Punkten wirklich?
Wie findet man überhaupt aus mehreren Messungen das „richtige" Ergebnis?
Haben bestimmte Beobachter besonders schlechte Messungen geliefert?
Wie ist die Schwankung der Beobachtungen zu interpretieren?
Hat sich der Abstand der Punkte verändert?
Ist eines der verwendeten Instrumente defekt?

→ Diese Fragen sind nicht auf anhieb zu beantworten; die gewohnte Vorstellung von genau und ungenau, richtig oder falsch, fehlerfrei oder fehlerhaft ist neu zu interpretieren. Korrekte Antworten auf solche und ähnliche Fragen liefert die Fehlerlehre mit der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Statistik.
Ungenauigkeit sind bei Messungen jeder Art unvermeidlich; völlig Fehlerfreie Messungen sind infolge der Mängel der Messgeräte und der Unvollkommenheit der menschlichen Sinne nicht möglich.
Streuungen in einer Beobachtungsreihe sind vorerst zu akzeptieren.
Die Messungen eines „wahren Wertes" sind von uns angestrebt, ohne ihn jemals erreichen zu können.
Von grundlegender Bedeutung ist es daher, dass der Techniker seine Beobachtungsgenauigkeit, bzw. seine Beobachtungsfehler nach Art und Größe kennt um zu jeden Messungsergebnis oder aus Messungen abgeleitetes Ergebnis auf dessen Zuverlässigkeit angeben zu können.

Angabe von Ergebnissen:

→ Ergebnis und Genauigkeitsmaß
z.B. Abstand der Punkte ist **s = 100, 123m ± 1cm**



Fehlerlehre und Begriffe:

2 Gruppen von Fehlerarten:

1. Messfehler

Sind jeweils einer Beobachtung zugeordnet und werden nach Art ihrer Entstehung in grobe, systematische und zufällige Fehler unterteilt.

2. Genauigkeitsmaße:

Gelten für die Beobachtung selbst, sowie für abgeleitete Größen. Je nach Zweckmäßigkeit werden unterschiedliche, aber wohldefinierte Genauigkeitsmaße angewandt.

Unterteilung der Messfehler:

a) *grobe Fehler:* für diese Fehlerart kann das gewohnte Verständnis von „Fehler“ im Sinne eines von Beobachter begangenen Irrtums beibehalten.
Grobe Fehler sind auf jeden Fall durch sorgfältiges und kontrolliertes Messen auszuschließen (dürfen nicht vorkommen)

b) *systematische Fehler:* verfälschen das Meßergebnis in regelmäßiger Weise und im allgemeinen nach einer erkennbaren Gesetzmäßigkeit. (z.B. ungenügende Eichung, falsche Definition des Nullpunktes)
Charakteristisch für die systematischen Fehler ist, dass bei gleichen Voraussetzungen auch mit dem gleichen Betrag auftreten. Systematische Fehler können ermittelt werden und mittels einer entsprechenden Korrektur am Meßergebnis oder durch Eichung der Meßgeräte korrigiert werden.

c) *Zufällige Fehler:* sind dafür verantwortlich, dass nach dem Ausscheiden von groben und systematischen Fehlern in einer Beobachtungsreihe immer noch streuen.

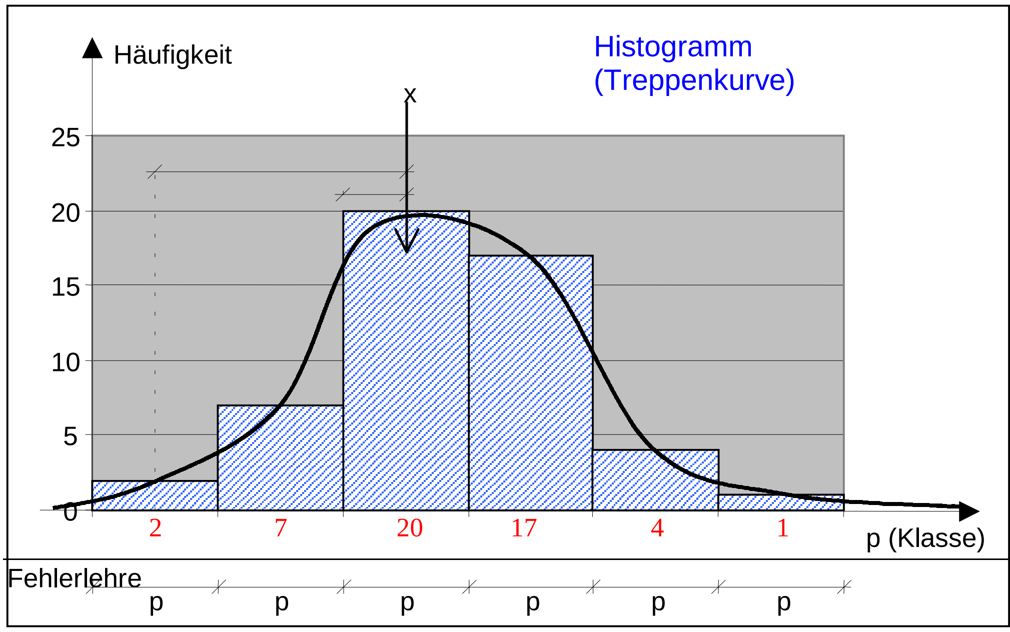
Das eigentliche Anliegen der Fehlerlehre ist die Behandlung dieser offenbar nicht vermeidbaren zufälligen Fehler.

Der zufällige Fehler tritt regellos auf; er ist bei einer einzelnen Beobachtung nach seinem Betrag und Vorzeichen nicht vorhersehbar.

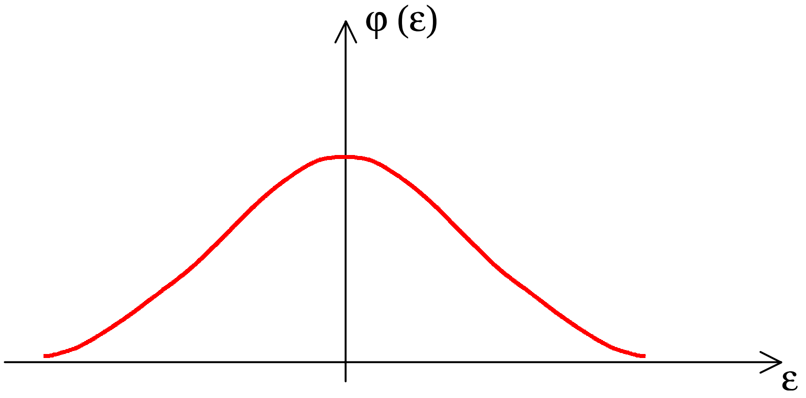
Wir stellen uns den zufälligen Fehler vor als Summe aus „elementaren“ Fehlereinflüssen instrumeteller, physiologischer, persönlicher Art sowie äußerer Einflüsse.

Das Gauß’sche Fehlergesetz:

Zufällige Fehler sind nicht vorhersehbar, es lassen sich aber bestimmte Regeln bezüglich der Häufigkeit des Auftretens der Fehler angeben.
Wir teilen die Ergebnisse einer Beobachtungsreihe nach ihrem Betrag in Klassen mit einer Breite p ein und ermitteln die Anzahl der auf jede Klasse entfallenden Werte.



Das Ergebnis wird nun in einem Balkendiagramm dargestellt, wobei die Anzahl für die betreffende Klasse als Höhe des Balkens aufgetragen wird.
Man kann erkennen, dass sich „starke" Klassen an einer bestimmten Stelle häufen (nämlich um den angestrebten Wert). Die Abweichung der Klasse vom Häufungspunkt stellt nun offensichtlich den Fehler der Klasse nach und die Häufigkeit mit der ein bestimmter Fehler auftritt ist abhängig von seiner Größe. Wir stellen uns nun eine beliebige große Beobachtungsreihe vor ($n \rightarrow \infty$) und wählen eine beliebig kleine Klassenbreite ($p \rightarrow \varnothing$). Das Histogramm geht nun in eine kontinuierlich gekrümmte, glockenförmige Linie über.
Gauß nannte diese Linie Fehlerkurve und leitete ihre Funktion aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung ab.



$$\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}}$$

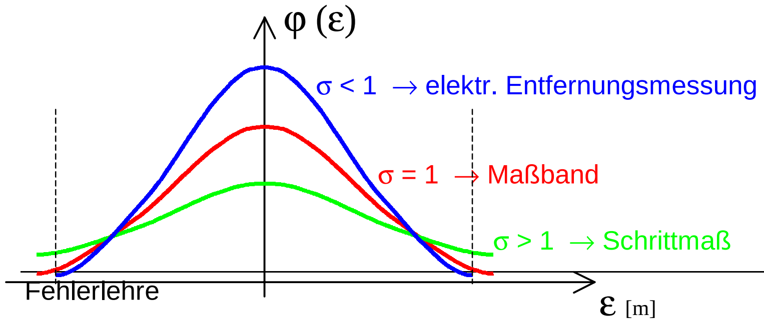
ε… wahrer Fehler
e… Basis der natürlichen Logarithmen
σ… theoretische Streuung
φ (ε)… Häufigkeit
Wahrscheinlichkeitsdichte der Fehlerverteilung

Die Gesetzmäßigkeiten des Gauß'schen Fehlergesetzes (die statistische Verteilung der Fehler) spiegelt sich in unseren Beobachtungen wieder, aber auch in sehr vielen anderen Zufallsgrößen in statistischen Sinn. Die Gauß'sche Fehlerverteilung wird daher in der Statistik als Normalverteilung bezeichnet. Unsere Beobachtungen gelten in der Statistik als normalverteilte Zufallsgrößen.

Gauß'sche Fehlerverteilung → Normalverteilung
Beobachtungen → normalverteilte Zufallsgrößen

Aussage und Anwendung des Gauß'schen Fehlergesetzes:

1) Die Glockenform ist abhängig von der theoretischen Streuung σ



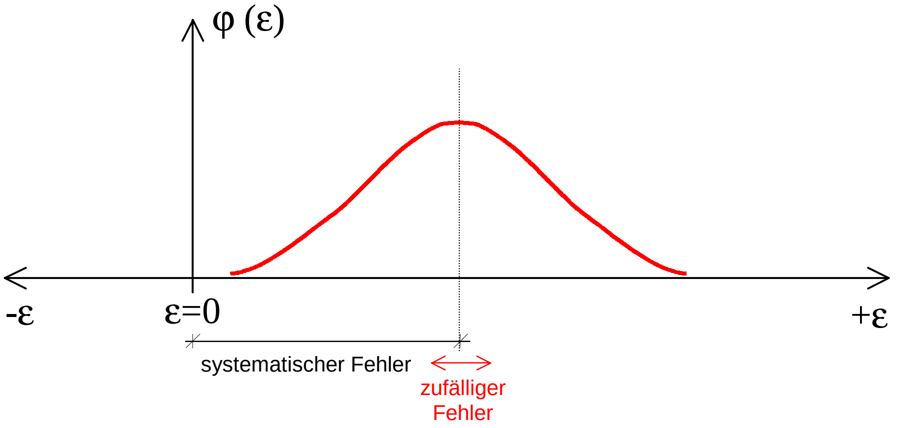
Die theoretische Streuung σ ist offensichtlich ein Parameter der die Messungsgenauigkeit bzw. die Genauigkeit des verwendeten Instruments oder Meßverfahrens charakterisiert.

→ je kleiner das σ, desto größer ist die Wahrscheinlichkeitsdichte für kleine Fehler ε.

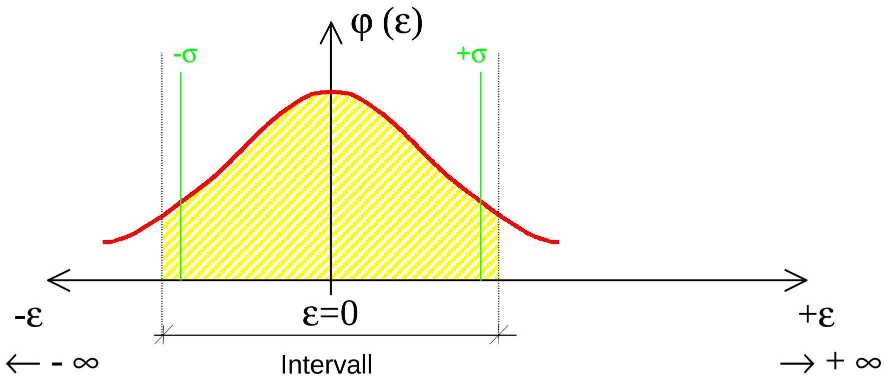
→ je größer das σ, desto größer ist die Wahrscheinlichkeitsdichte für große Fehler ε.

2) Die Gauß'sche Fehlerkurve hat im allgemeinen eine symmetrische Form.

3) Ein konstanter, symmetrischer Fehler bewirkt eine Verschiebung der Kurve entlang der ε-Achse, die Form der Kurve wird nicht verändert.



4) Wahrscheinlichkeitsaussagen: die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Fehlers in einem bestimmten Intervall.



$p\ (-\infty < \varepsilon < +\infty) = 100\ \%$ p…Wahrscheinlichkeit

$p\ (-\sigma < \varepsilon < +\sigma) = 68\ \%$

$p\ (-\sigma > \varepsilon > +\sigma) = 32\ \%$

$p\ (-2\sigma < \varepsilon < +2\sigma) = 95\ \%$

$p\ (-2\sigma > \varepsilon > +2\sigma) = 5\ \%$

$p\ (-3\sigma < \varepsilon < +3\sigma) = 99{,}7\ \%$

$p\ (-3\sigma > \varepsilon > +3\sigma) = 0{,}3\ \%$

Kleine Fehler bzw. gute Messungen sind wahrscheinlicher als große Fehler bzw. schlechte Messungen.

Mittelwerte und Genauigkeitsmaße:

Mittelwert: arithmetisches Mittel

$$x = \frac{[l]}{n}$$

x…arithmetisches Mittel

l…Beobachtung / Messungen
n…Anzahl Beobachtung
[ ]…Gauß'sche Summenschreibweise
$[l] = l_1 + l_2 + \ldots + l_n$

Die Differenz zwischen Mittelwert und Einzelbeobachtung wird als Verbesserung bezeichnet.

Beobachtung + Verbesserung = Mittelwert
$l_1 + v_1 = x$

Für die Verbesserungen gilt, dass deren Quadratsumme ein Minimum wird.
$[vv] = v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2 = \text{minimal !}$

Das ist die Grundforderung der Methode der kleinsten Quadrate (Verbesserungsquadrate). Der Lösungsansatz zur Vermittlung eines Ergebnisses nach der Methode der kleinsten Quadrate garantiert, dass das Ergebnis der wahrscheinlichste, „beste" Näherungswert für den wahren Wert ist.

Beispiel:

l_i gon	v_i mgon	v_i mgon auf 1. Messung bezogen
52,356	-5,3	0
52,348	2,7	8
52,346	4,7	10
52,347	3,7	9
52,352	-1,3	4
52,355	-4,3	1

$x = 52{,}3507^{gon}$

$[v] = 0$
$[vv] = 91$

$x = 52{,}356^{\,gon}$

$[vv] = 262$

Genauigkeitsmaße:

Genauigkeitsmaße oder Fehlermaße kennzeichnen die Vertrauenswürdigkeit eines Meßwertes oder allgemein eines Ergebnisses. Das wichtigste Fehlermaß ist der mittlere Fehler.

$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$$ …mittlerer Fehler der Einzelbeobachtung
…Standardabweichung
…empirische Streuung

$$m = \pm 4{,}3^{mgon}$$

Die empirische Streuung ist ein Näherungswert für die theoretische Streuung σ (siehe Gauß'sches Fehlergesetz)

$$\sigma = \pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n-1}}$$ für $n \to \infty$ …theoretische Streuung

Dieser Näherungswert ist umso genauer, je größer die Beobachtungsreihe ist aus der der mittlere Fehler berechnet wird.

p (-n < v < +n) < 68 %

$M = \frac{m}{\sqrt{n}}$ … mittlerer Fehler des arithmetischen Mittels

$M = \pm 1{,}8^{mgon}$

$\rightarrow$ x = 52,3507 ^{gon} $\pm$ 1,8 ^{mgon}

Relativer Fehler

Der relative Fehler ist definiert als Verhältnis des Fehlermaßes zur Beobachtung bzw. zum Ergebnis selbst.

$\frac{m_l}{l}$ …relativer Fehler

$$\frac{4{,}3^{mgon}}{52{,}36^{gon}} = \frac{0{,}0043^{gon}}{52{,}36^{gon}} = 8{,}21 \cdot 10^{-5}$$

Die Anwendung des relativen Fehlers ist es Beobachtungsverfahren bzw. Instrumente untereinander zu vergleichen.

Fehlergrenzen

Das Gauß'sche Fehlergesetz zeigt, dass kleine Fehler häufig vorkommen, größere zunehmend seltener.
Der dreifache Betrag des mittleren Fehlers wird nach dem Gauß'schen Fehlergesetz nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,27 % überschritten. Dieser Betrag wird in Behördlichen Vermessungsanweisungen als Grenzfehler (Fehlergrenze) interpretiert, der nicht überschritten werden darf.

Messungen ungleicher Genauigkeit

Gewicht (Qualität einer Messung)

Ist eine Größe mehrmals mit verschiedener Genauigkeit beobachtet werden, müssen beim Bilden eines Mittelwertes die Genauigkeitsverhältnisse oder die Gewichte der einzelnen Messungen berücksichtigt werden.
Für die Festlegung von Gewichten definieren wir eine Bezugs- oder Vergleichsmessung; die einzelne Messung wird bezüglich dieser Vergleichsmessung gewichtet.

$$p_i = \frac{m_0^{\,2}}{m_i^{\,2}}$$

p_i…Gewicht der Beobachtung l_i
m_i…mittlerer Fehler der Beobachtung l_i
m_0…mittlerer Fehler der Vergleichsmessung; ihr Gewicht ist mit p_0=1 definiert (Gewichtseinheit)

$\rightarrow$ *gewogenes Mittel*

$$x = \frac{l_1 \cdot p_1 + l_2 \cdot p_2 + \ldots + l_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}$$

$[pvv] = \text{minimal!}$

Beispiel: Streckenmessung

i	l_i [m]	m_i	p_i [ ]	v_i [cm]	
1	123,44	± 5 cm	1	1,6	…Maßband
2	123,6	± 20 cm	0,0625	-14,4	…optische Streckenmessung
3	123,456	± 1 cm	25	0	…elektronische Entfernungsmessung
4	124	± 2 m	0,000625	-54,4	…Schrittmaß

$$p_i = \frac{m_0^2}{m_i^2} \qquad p_2 = \frac{\pm 5^2 cm}{\pm 20^2 cm} = 0{,}0625$$

$$m_0 \to p_0 = 1 \qquad p_3 = \frac{\pm 5^2 cm}{\pm 1^2 cm} = 25$$

$m_0 = \pm 5$ Annahme …***a anteriori***

$$x = 123{,}456\,m \pm M$$
$$[pvv] = 1{,}737 \cdot 10^{-03}$$

$$v_i = x - l_i$$

Kontrolle: $[vp] = 0$

$$m_0 = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}} = 2{,}4\,cm$$ …***a posteriori*** (Fehler der Gewichtseinheit)

$$M = \frac{m_0}{\sqrt{[p]}} = 0{,}470\,cm$$ …mittlerer Fehler des gewogenen Mittels

x = 123,456 m ± 0,47 cm

Fehlerfortpflanzungsgesetz:

Problem: Messwerte werden vielfach für Berechnungen verwendet; aus fehlerbehafteten Größen (Beobachtungen) können nur fehlerbehafteten Größen abgeleitet werden; die Unsicherheit der Beobachtungen wird sich auf das Ergebnis der Berechnungen fortpflanzen.

Allgemeiner Ansatz $\to$ funktionales Modell

lineare Funktion:

$$x = a_0 + a_1 \cdot l_1 + a_2 \cdot l_2 + \ldots + a_n \cdot l_n$$

x… **Funktionswert**

l_i… **Beobachtungen** (Fehlerbehaftete Größen die in der Berechnung verwendet werden und deren Unsicherheit m_i wir kennen

a_i… **Koeffizienten** (Fehlerfrei eingeführte Werte, die sich aus der Berechnungsvorschrift ergeben)

Interpretation:

$x = l_1 + l_2$

$a_1 = a_2 = 1$

$a_0 = 0$

$p_{(mbar)} = 1.33 \cdot p_{(mmHg)}$

Der mittlere Fehler m_x des Funktionswertes x wird nach folgender Vorschrift berechnet:

$$m_x^2 = a_1^2 \cdot m_1^2 + a_2^2 \cdot m_2^2 + \ldots + a_n^2 \cdot m_n^2$$ …Fortpflanzungsgesetz der mittleren Fehler

$$m_x = \sqrt{\ldots}$$

Wesentliches Merkmal dieser Vorschrift ist der quadratische Ansatz; jede fehlerbehaftete Größe die in einer Berechnung verwendet wird, tritt zur Unsicherheit des Ergebnisses bei (das Fehlerfortpflanzungsgesetz kennt kein *minus*).

Übungen: *Fehlerfortpflanzung*

Summe (oder Differenz) gleich genauer Messungen (Größen):

$$x = l_1 + l_2 + \ldots l_n$$

$$m_1 + m_2 + \ldots m_n \qquad m_1 = m_2 = \ldots m_n = m$$

$$\boxed{m_x{}^2 = a_1{}^2 \cdot m_1{}^2 + a_2{}^2 \cdot m_2{}^2 + \ldots a_n{}^2 \cdot m_n{}^2} \rightarrow \text{Vorschrift, Rezept}$$

$$m_x{}^2 = 1^2 \cdot m_1{}^2 + 1^2 \cdot m_2{}^2 + \ldots 1^2 \cdot m_n{}^2 = n \cdot m^2$$

$$m_x = \pm m \cdot \sqrt{n}$$

Werden mehrere gleich genaue Messungen zu einer Summe oder Differenz vereinigt, so wächst der mittlere Fehler des Ergebnisses mit der Quadratwurzel der Anzahl der Messungen.

$$-\Delta x = x_2 - x_1 = 0{,}003\,\text{m} \pm 5{,}8\,\text{cm}$$

$$\Delta y = y_2 - y_1 = 18{,}59\,\text{m} \pm 5{,}8\,\text{cm}$$

$$x_1 = 10{,}42\text{m} \pm 3\,\text{cm}$$

$$y_1 = 0{,}34\text{m} \pm 3\,\text{cm}$$

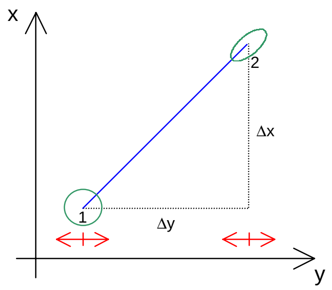
$$x_2 = 10{,}45\text{m} \pm 5\,\text{cm}$$

$$y_2 = 18{,}93\text{m} \pm 5\,\text{cm}$$

gesucht:

$$m_{\Delta x} = \pm\sqrt{1^2 \cdot 5^2 + 1^2 \cdot 3^2} = \pm 5{,}8\,\text{cm}$$

$$m_{\Delta y} = \pm\sqrt{1^2 \cdot 5^2 + 1^2 \cdot 3^2} = \pm 5{,}8\,\text{cm}$$



arithmetisches Mittel:

$$x = \frac{l_1 + l_2 + \ldots l_n}{n}$$

$$m_1 = m_2 = \ldots m_n = m$$

$$m_x = M = \frac{m}{\sqrt{n}}$$

$$m_x{}^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot m_1{}^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot m_2{}^2 + \ldots \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot m_n{}^2 = n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot m^2 = \frac{m^2}{n}$$

Der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels geht mit der Quadratwurzel aus der Anzahl der Messungen zurück.

OBERSCHULE FÜR GEOMETER „PETER ANICH“, BOZEN

- Fachrichtung Baubetrieb -

Skripte aus 5 Jahren Oberschule

Diese Arbeit soll als didaktische Unterlage für den Schulunterricht oder als Nachschlagewerk dienen.

Diese Arbeit erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Ich weise jegliche Verantwortung in Bezug auf Inhaltsfehler und Fehlen von Textteilen von mir. Ich bitte aber darum, mir alle Fehler mitzuteilen, damit ich die Unterlagen verbessern und erweitern kann.

Moroder Daniel
Tinderlaweg 13A
39046 St. Ulrich
daniel@moroder.de

St. Ulrich, September 2001